

UNIVERSITE D'ETAT DE MOSCOU LOMONOSOV
FACULTE DES MATHEMATIQUES APPLIQUEES ET CYBERNETIQUE

Fedorenko Veronika Viktorovna

MODELISATION MATHEMATIQUE DES ECOULEMENTS SPATIAUX DE GAZ DANS
LES TUYERES

Spécialité 05.13.16 – “Application des équipements informatiques, de la modélisation
mathématique et des méthodes mathématiques dans les recherches scientifiques”

Exposé de la thèse de doctorat (candidat en russe) ès sciences physico-mathématiques

Moscou – 1999

La thèse est accomplie à la faculté des mathématiques appliquées et cybernétique de l'Université d'Etat de Moscou Lomonossov.

Chef scientifique:

Docteur (docteur en russe) ès sciences physico-mathématiques, professeur Rosliakov Guennady Stepanovitch.

Contradicteurs officiels:

Docteur (docteur en russe) ès sciences techniques, membre correspondant de l'Académie des Sciences de la Russie, professeur Piroumov Ouliane Gaikovitch,

Docteur (docteur en russe) ès sciences physico-mathématiques, professeur Tichkine Vladimir Fiodorovitch.

Organisation principale:

NPO "Energomach" académicien V.P.Glouchko.

La soutenance de la thèse aura lieu le 5 mars 1999, 14h30m à la séance du Conseil spécialisé K.053.05.87 à la faculté des mathématiques appliquées et cybernétique de l'Université d'Etat de Moscou Lomonossov (119899, Moscou, Vorobiovy gory, Université de Moscou, deuxième bâtiment, faculté des mathématiques appliquées et cybernétique, salle 685)

Veillez prendre connaissance de la thèse dans la bibliothèque de l'Université de Moscou en deuxième bâtiment.

L'exposé de la thèse est expédié le 25 janvier 1999.

Secrétaire scientifique
du Conseil spécialisé,
chargé de cours

V.M.Govorov

CARACTERISTIQUE GENERALE DU TRAVAIL

Actualité du travail. L'actualité de l'étude des méthodes de recherches des écoulements spatiaux intérieurs de gaz est conditionnée par un nombre de raisons. Premièrement, dans les tuyères axisymétriques, qui sont utilisées largement jusqu'à présent pour la résolution de beaucoup de problèmes techniques et scientifiques, l'écoulement peut avoir un caractère spatial (mais non axisymétrique) Cela peut avoir lieu à cause de conditions initiales asymétriques à l'entrée à une tuyère ou à cause de déformations asymétriques de la paroi d'une tuyère. Deuxièmement, il est désirable parfois d'avoir une tuyère à géométrie complexe pour des raisons constructives, par exemple, la tuyère à section non circulaire ou celle à un axe curviligne. Les tuyères sont un cas particulier de canaux et elles sont utilisées dans les installations techniques pour le réglage du flux fluide à une sortie. Les tuyères à sortie rectangulaire ont un intérêt certain, parce qu'elles forment en liasse une issue d'une façon économique, sans vides. C'est pourquoi il est nécessaire de créer les algorithmes et les programmes efficaces d'un point de vue de la dépense de temps machine pour l'étude numérique des écoulements spatiaux intérieurs de gaz.

Objectif du travail. L'objectif de la thèse a été de créer et de réaliser les algorithmes efficaces sur la base des méthodes parfaitement implicites pour le calcul des écoulements spatiaux irrotationnels de gaz dans les tuyères et d'étudier à l'aide de ces algorithmes les problèmes appliqués.

Nouveauté scientifique. Une méthode parfaitement implicite modifiée (MPIM) de la résolution d'un système d'équations algébriques issues de l'approximation symétrique (sur le poncif spatial de 19 points) d'un problème aux limites pour une équation différentielle linéaire aux dérivées partielles de type elliptique, cette nouvelle méthode est étudiée. Pour la première fois la MPIM est appliquée au calcul des écoulements spatiaux irrotationnels de gaz dans les tuyères. Ces écoulements sont décrits par une équation du potentiel des vitesses de type mixte, c'est pourquoi le transfert des méthodes numériques étudiées pour les équations linéaires elliptiques à une équation du potentiel n'est pas trivial. Les avantages principaux du nouvel algorithme sont une haute vitesse de la convergence et une exactitude acceptable. Un autre algorithme, qui représente une combinaison de la MPIM et de la méthode de factorisation approximative (MFA), est proposé pour le calcul des écoulements mixtes comprenant de grands domaines supersoniques. La possibilité de la construction des tuyères à sortie rectangulaire proches de tuyères axisymétriques du point de vue des caractéristiques de traction, cette possibilité est mise en évidence à l'aide des algorithmes réalisés.

Valeur pratique. Les études faites ont montré que les algorithmes élaborés peuvent être utilisés pour le calcul des écoulements 3D de gaz dans les tuyères concrètes dans l'étendue assez large de vitesses.

Approbaton du travail. Les résultats principaux du travail sont rapportés à la VIII-ième école-séminaire "Les problèmes actuels de l'aérohydrodynamique" (Sébastopol', septembre, 1996), aux XXI-ièmes lectures scientifiques de la cosmonautique (Moscou, janvier, 1997), à la conférence internationale d'étudiants et de doctorants en sciences fondamentales "Lomonossov" (Moscou, avril, 1997).

Structure et volume du travail. La thèse comprend une introduction, deux chapitres (le premier chapitre contient deux paragraphes, le deuxième – trois), une conclusion et une liste bibliographique de 78 titres. Le volume total de la thèse, y compris 32 dessins, compte 117 pages.

CONTENU DU TRAVAIL

L'introduction contient un aperçu des méthodes de l'étude des écoulements spatiaux. L'actualité de la création de nouvelles méthodes vites et exactes pour le calcul des écoulements 3D de gaz dans les tuyères et les canaux est argumentée.

L'étude des écoulements spatiaux de gaz dans les tuyères a un grand intérêt scientifique et appliqué. Pour plusieurs cas on peut recevoir un pronostic assez exact en utilisant un modèle d'écoulement irrotationnel. Cet écoulement est décrit par une équation du potentiel des vitesses, avec cela toutes les fonctions aérodynamiques sont exprimées par une fonction du potentiel. Les années dernières un nombre d'auteurs ont étudié les méthodes très efficaces de la résolution d'une équation du potentiel qui ont été nommées les méthodes relaxationnelles. Ce sont la méthode de relaxation supérieure successive (MRSS) et les versions différentes de la méthode de factorisation approximative (MFA). A présent quelques versions de la MFA, qui se distinguent l'une de l'autre par la forme d'opérateurs 1D, sont connues. Il y a près de 20 ans les MRSS et MFA ont commencé à s'appliquer par les spécialistes étrangers pour la résolution numérique des problèmes extérieurs de l'aérodynamique. Les premiers travaux aux applications des méthodes relaxationnelles pour étudier les problèmes intérieurs de l'aérodynamique ont été accomplis dans notre pays par: Chifrine E.Gu., Choulanov M.A.¹; Ivanov M.Ya., Koretsky V.V.²; Veretentsev V.A., Metchenova V.A., Rosliakov Gu.S.³. Outre les MFA pour la résolution d'une équation du potentiel des vitesses, les méthodes parfaitement implicites ont fait ses preuves. Le premier travail a été publié par Stone⁴, qui appliquait une méthode créée par lui et nommée la méthode parfaitement implicite (MPI) à la résolution d'un système d'équations algébriques issues de l'approximation symétrique d'un problème aux limites pour une équation différentielle linéaire aux dérivées partielles de type elliptique à deux variables indépendantes sur le poncif (*template*) de 5 points. Cette méthode a été étendue par Schneider, Zedan⁵ au schéma de 9 points et nommée la méthode parfaitement implicite modifiée (MPIM). Pour le compte de la modification on a réussi à augmenter la vitesse de la convergence 2-3 fois. Metchenova V.A. et Rosliakov Gu.S.⁶ ont étendu la MPIM à une équation complète du potentiel des vitesses de type mixte pour étudier les écoulements 2D de gaz dans les tuyères. La MPIM a été étendue aussi au cas spatial⁷. Dans cette publication les auteurs fournissent ses formules de calcul pour le poncif de 7 points et les résultats des calculs faits à ce schéma pour une équation 3D stationnaire de la conductibilité de la chaleur. La méthode la plus générale parmi cette classe de méthodes est celle parfaitement implicite modifiée de la résolution d'un système d'équations algébriques issues de l'approximation symétrique d'un problème aux limites pour une équation différentielle linéaire aux dérivées partielles de type elliptique à trois variables indépendantes sur le poncif spatial de 19 points. Sur la base de cette méthode Il est aisé de

¹ Chifrine E.Gu., Choulanov M.A. Résolution du problème direct pour une tuyère plane de Laval par une méthode numérique relaxationnelle au schéma Murman-Cole. //Mémoires du TsAGuI. – 1981. – vol.12, №3. En russe.

² Ivanov M.Ya., Koretsky V.V. Calcul des écoulements dans les tuyères 2D et 3D par la méthode de factorisation approximative. //Revue des mathématiques appliquées et de la physique mathématique. – 1985. – vol.25, №9. En russe.

³ Veretentsev V.A., Metchenova V.A., Rosliakov Gu.S. Etude numérique des écoulements de gaz dans les canaux et les tuyères sur la base des équations du potentiel. //Ecoulements non stationnaires de gaz à ondes de choc. – Leningrad: Editions du LPhTI, 1990. En russe.

⁴ Stone H.L. Iterative Solution of Implicit Approximation of Multidimensional Partial Differential Equations. //Siam Journal of Numerical Analysis. – 1968. – V.5, Sept. En anglais.

⁵ Schneider G., Zedan M. A Modified Strongly Implicit Procedure for the Numerical Solution of Field Problems. //Numerical Heat Transfer. – 1981. – V.4, Jan. En anglais.

⁶ Veretentsev V.A., Metchenova V.A., Rosliakov Gu.S. Le travail mentionné.

⁷ Schneider G., Zedan M. Méthode parfaitement implicite modifiée du calcul des champs 3D de température. //Technique aérospatiale. – 1983. – vol.1, №11. En russe.

déduire les formules de calcul pour le schéma de 7 points (en cas 3D) et pour le schéma de 9 points (en cas 2D). Cependant jusqu'à présent la description détaillée de la MPIM contenant les formules de calcul pour l'approximation de 19 points n'a pas été publiée.

Le premier chapitre est consacré aux méthodes parfaitement implicites de la résolution d'équations différentielles aux dérivées partielles de type elliptique. Le premier paragraphe de ce chapitre contient la description détaillée de la méthode parfaitement implicite modifiée à l'approximation de 19 points.

L'approximation symétrique de l'équation elliptique

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(B^{11}(x, y, z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + B^{12}(x, y, z) \frac{\partial \varphi}{\partial y} + B^{13}(x, y, z) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left(B^{12}(x, y, z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + B^{22}(x, y, z) \frac{\partial \varphi}{\partial y} + B^{23}(x, y, z) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(B^{13}(x, y, z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + B^{23}(x, y, z) \frac{\partial \varphi}{\partial y} + B^{33}(x, y, z) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = Q(x, y, z). \end{aligned}$$

sur le poncif de 19 points réduit à la résolution du système d'équations linéaires algébriques:

$$\begin{aligned} & A_{i,j,k}^{bs} \varphi_{i,j-1,k-1} + A_{i,j,k}^{bw} \varphi_{i-1,j,k-1} + A_{i,j,k}^b \varphi_{i,j,k-1} + A_{i,j,k}^{be} \varphi_{i+1,j,k-1} + A_{i,j,k}^{bn} \varphi_{i,j+1,k-1} + A_{i,j,k}^{sw} \varphi_{i-1,j-1,k} + \\ & + A_{i,j,k}^s \varphi_{i,j-1,k} + A_{i,j,k}^{se} \varphi_{i+1,j-1,k} + A_{i,j,k}^w \varphi_{i-1,j,k} + A_{i,j,k}^p \varphi_{i,j,k} + A_{i,j,k}^e \varphi_{i+1,j,k} + A_{i,j,k}^{nw} \varphi_{i-1,j+1,k} + \\ & + A_{i,j,k}^n \varphi_{i,j+1,k} + A_{i,j,k}^{ne} \varphi_{i+1,j+1,k} + A_{i,j,k}^{fs} \varphi_{i,j-1,k+1} + A_{i,j,k}^{fw} \varphi_{i-1,j,k+1} + A_{i,j,k}^f \varphi_{i,j,k+1} + A_{i,j,k}^{fe} \varphi_{i+1,j,k+1} + \\ & + A_{i,j,k}^{fn} \varphi_{i,j+1,k+1} = Q_{i,j,k}, \end{aligned} \quad (1)$$

où

$$\begin{aligned} & A_{i,j,k}^{bs}, A_{i,j,k}^{bw}, A_{i,j,k}^b, A_{i,j,k}^{be}, A_{i,j,k}^{bn}, A_{i,j,k}^{sw}, A_{i,j,k}^s, A_{i,j,k}^{se}, A_{i,j,k}^w, A_{i,j,k}^p, A_{i,j,k}^e, A_{i,j,k}^{nw}, A_{i,j,k}^n, A_{i,j,k}^{ne}, \\ & A_{i,j,k}^{fs}, A_{i,j,k}^{fw}, A_{i,j,k}^f, A_{i,j,k}^{fe}, A_{i,j,k}^{fn}, Q_{i,j,k} \end{aligned}$$

sont connus, φ sont inconnus. En forme matricielle on peut écrire ce système comme ça: $A\phi = q$. Les équations de ce système sont disposées par ordre de l'accroissement des valeurs i, j, k de manière que k varie de 0 à K , j varie de 0 à J , i varie de 0 à I , et avec cela le i – cycle est mis dans le j – cycle, celui-ci est mis dans le k – cycle. La forme de la matrice A est montrée sur fig.1. La matrice A peut être représentée comme le produit de deux matrices triangulaires: celle inférieure L' et celle supérieure U' ($A = L'U'$). Chacune de ces matrices est une $(I+1)(J+1)(K+1) \times (I+1)(J+1)(K+1)$ -matrice carrée. En cas général chacune de L' et U' a $(I+1)(J+2)+1$ diagonales non nulles. Les éléments non nuls de L' sont disposés entre la A^{bs} -diagonale et la A^p -diagonale, les éléments non nuls de U' sont disposés entre la A^p -diagonale et la A^{fn} -diagonale (fig.1). Le développement direct de la matrice A sans tenir compte de sa structure raréfiée en produit des matrices triangulaires, inférieure et supérieure, n'est pas efficace du point de vue de la dépense de temps machine. Construisons sur la base de la matrice A une matrice modifiée A' proche de la matrice A en sens certain. Ensuite ajoutons le vecteur colonne $A'\phi$ aux deux parties du système (1) et nous recevons l'équation $A'\phi = A'\phi - (A\phi - q)$, qui sera une base pour organiser un processus itératif. La matrice modifiée A' doit être mise sous la forme du produit des matrices triangulaires, inférieure L et supérieure U , bien raréfiées. Pour cela demandons que chacune des matrices L et U n'ait que 10 diagonales non nulles et que tous leurs éléments non nuls soient disposés sur les mêmes places que les éléments non nuls de la matrice A . La structure des matrices L и U est montrée sur fig.2, a et b. Avec cela demandons que les éléments non nuls de la matrice A soient égaux aux éléments non nuls de la matrice A' disposés sur les mêmes places que ceux-là. Nous avons de ces conditions les équations suivantes pour déterminer les éléments des matrices L и U :

$$\begin{aligned}
a_{i,j,k} &= A_{i,j,k}^{bs}, \\
b_{i,j,k} + a_{i,j,k} o_{i,j-1,k-1} &= A_{i,j,k}^{bw}, \\
c_{i,j,k} + a_{i,j,k} p_{i,j-1,k-1} + b_{i,j,k} n_{i-1,j,k-1} &= A_{i,j,k}^b, \\
d_{i,j,k} + a_{i,j,k} r_{i,j-1,k-1} + c_{i,j,k} n_{i,j,k-1} &= A_{i,j,k}^{be}, \\
e_{i,j,k} + b_{i,j,k} r_{i-1,j,k-1} + c_{i,j,k} p_{i,j,k-1} + d_{i,j,k} o_{i+1,j,k-1} &= A_{i,j,k}^{bn}, \\
f_{i,j,k} + a_{i,j,k} t_{i,j-1,k-1} + b_{i,j,k} s_{i-1,j,k-1} &= A_{i,j,k}^{sw}, \\
g_{i,j,k} + a_{i,j,k} u_{i,j-1,k-1} + c_{i,j,k} s_{i,j,k-1} + f_{i,j,k} n_{i-1,j-1,k} &= A_{i,j,k}^s, \\
h_{i,j,k} + a_{i,j,k} v_{i,j-1,k-1} + d_{i,j,k} s_{i+1,j,k-1} + g_{i,j,k} n_{i,j-1,k} &= A_{i,j,k}^{se}, \\
l_{i,j,k} + b_{i,j,k} u_{i-1,j,k-1} + c_{i,j,k} t_{i,j,k-1} + f_{i,j,k} p_{i-1,j-1,k} + g_{i,j,k} o_{i,j-1,k} &= A_{i,j,k}^w, \\
m_{i,j,k} + a_{i,j,k} w_{i,j-1,k-1} + b_{i,j,k} v_{i-1,j,k-1} + c_{i,j,k} u_{i,j,k-1} + d_{i,j,k} t_{i+1,j,k-1} + e_{i,j,k} s_{i,j+1,k-1} + \\
+ f_{i,j,k} r_{i-1,j-1,k} + g_{i,j,k} p_{i,j-1,k} + h_{i,j,k} o_{i+1,j-1,k} + l_{i,j,k} n_{i-1,j,k} &= A_{i,j,k}^p, \\
m_{i,j,k} n_{i,j,k} + c_{i,j,k} v_{i,j,k-1} + d_{i,j,k} u_{i+1,j,k-1} + g_{i,j,k} r_{i,j-1,k} + h_{i,j,k} p_{i+1,j-1,k} &= A_{i,j,k}^e, \\
m_{i,j,k} o_{i,j,k} + b_{i,j,k} w_{i-1,j,k-1} + e_{i,j,k} t_{i,j+1,k-1} + l_{i,j,k} p_{i-1,j,k} &= A_{i,j,k}^{mw}, \\
m_{i,j,k} p_{i,j,k} + c_{i,j,k} w_{i,j,k-1} + e_{i,j,k} u_{i,j+1,k-1} + l_{i,j,k} r_{i-1,j,k} &= A_{i,j,k}^n, \\
m_{i,j,k} r_{i,j,k} + d_{i,j,k} w_{i+1,j,k-1} + e_{i,j,k} v_{i,j+1,k-1} &= A_{i,j,k}^{ne}, \\
m_{i,j,k} s_{i,j,k} + f_{i,j,k} v_{i-1,j-1,k} + g_{i,j,k} u_{i,j-1,k} + h_{i,j,k} t_{i+1,j-1,k} &= A_{i,j,k}^{fs}, \\
m_{i,j,k} t_{i,j,k} + f_{i,j,k} w_{i-1,j-1,k} + l_{i,j,k} u_{i-1,j,k} &= A_{i,j,k}^{fv}, \\
m_{i,j,k} u_{i,j,k} + g_{i,j,k} w_{i,j-1,k} + l_{i,j,k} v_{i-1,j,k} &= A_{i,j,k}^f, \\
m_{i,j,k} v_{i,j,k} + h_{i,j,k} w_{i+1,j-1,k} &= A_{i,j,k}^{fe}, \\
m_{i,j,k} w_{i,j,k} &= A_{i,j,k}^{fn}.
\end{aligned} \tag{2}$$

On peut déduire (*deduce* mais pas *deduct*) des équations (2) les formules explicites récurrentes pour déterminer les valeurs $a_{i,j,k}$, $b_{i,j,k}$, $c_{i,j,k}$, $d_{i,j,k}$, $e_{i,j,k}$, $f_{i,j,k}$, $g_{i,j,k}$, $h_{i,j,k}$, $l_{i,j,k}$, $m_{i,j,k}$, $n_{i,j,k}$, $o_{i,j,k}$, $p_{i,j,k}$, $r_{i,j,k}$, $s_{i,j,k}$, $t_{i,j,k}$, $u_{i,j,k}$, $v_{i,j,k}$, $w_{i,j,k}$, parce qu'au moment du calcul des éléments des matrices L, U ayant les indices i, j, k les éléments de la matrice U ayant les indices $i, j-1, k-1$; $i-1, j, k-1$; $i, j, k-1$; $i+1, j, k-1$; $i, j+1, k-1$; $i-1, j-1, k$; $i, j-1, k$; $i+1, j-1, k$; $i-1, j, k$ sont déjà connus. La matrice modifiée $A' = LU$, dont la structure est montrée sur fig.3, outre 19 diagonales non nulles de la matrice A a 24 diagonales non nulles en plus qui sont marquées comme $\pi_{i,j,k}^1, \dots, \pi_{i,j,k}^{24}$. Les formules pour les éléments complémentaires de la matrice A' sont:

$$\begin{aligned}
\pi_{i,j,k}^1 &= a_{i,j,k} n_{i,j-1,k-1}, \quad \pi_{i,j,k}^2 = d_{i,j,k} n_{i+1,j,k-1}, \quad \pi_{i,j,k}^3 = b_{i,j,k} o_{i-1,j,k-1}, \\
\pi_{i,j,k}^4 &= b_{i,j,k} p_{i-1,j,k-1} + c_{i,j,k} o_{i,j,k-1}, \quad \pi_{i,j,k}^5 = c_{i,j,k} r_{i,j,k-1} + d_{i,j,k} p_{i+1,j,k-1} + e_{i,j,k} n_{i,j+1,k-1}, \\
\pi_{i,j,k}^6 &= d_{i,j,k} r_{i+1,j,k-1}, \quad \pi_{i,j,k}^7 = e_{i,j,k} o_{i,j+1,k-1}, \quad \pi_{i,j,k}^8 = e_{i,j,k} p_{i,j+1,k-1}, \quad \pi_{i,j,k}^9 = e_{i,j,k} r_{i,j+1,k-1}, \\
\pi_{i,j,k}^{10} &= a_{i,j,k} s_{i,j-1,k-1}, \quad \pi_{i,j,k}^{11} = h_{i,j,k} n_{i+1,j-1,k}, \quad \pi_{i,j,k}^{12} = b_{i,j,k} t_{i-1,j,k-1} + f_{i,j,k} o_{i-1,j-1,k}, \\
\pi_{i,j,k}^{13} &= d_{i,j,k} v_{i+1,j,k-1} + h_{i,j,k} r_{i+1,j-1,k}, \quad \pi_{i,j,k}^{14} = l_{i,j,k} o_{i-1,j,k}, \quad \pi_{i,j,k}^{15} = e_{i,j,k} w_{i,j+1,k-1},
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
\pi_{i,j,k}^{16} &= f_{i,j,k} s_{i-1,j-1,k}, & \pi_{i,j,k}^{17} &= g_{i,j,k} s_{i,j-1,k}, & \pi_{i,j,k}^{18} &= h_{i,j,k} s_{i+1,j-1,k}, & \pi_{i,j,k}^{19} &= f_{i,j,k} t_{i-1,j-1,k}, \\
\pi_{i,j,k}^{20} &= f_{i,j,k} u_{i-1,j-1,k} + g_{i,j,k} t_{i,j-1,k} + l_{i,j,k} s_{i-1,j,k}, & \pi_{i,j,k}^{21} &= g_{i,j,k} v_{i,j-1,k} + h_{i,j,k} u_{i+1,j-1,k}, \\
\pi_{i,j,k}^{22} &= h_{i,j,k} v_{i+1,j-1,k}, & \pi_{i,j,k}^{23} &= l_{i,j,k} t_{i-1,j,k}, & \pi_{i,j,k}^{24} &= l_{i,j,k} w_{i-1,j,k}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Il est évident que ces éléments complémentaires ne sont pas simultanément nuls, c'est pourquoi la matrice A' ne peut pas être identique à la matrice A .

La matrice A' construite de cette façon se développe aisément en produit des matrices triangulaires, inférieure et supérieure, bien raréfiées, dont les éléments peuvent être calculés des formules récurrentes. C'est pourquoi la méthode itérative de la résolution du système (1), laquelle a l'air comme ça: $A'\delta^{n+1} = \beta R^n$, sera efficace du point de vue de la dépense de temps machine pour une itération ($\delta^{n+1} = \phi^{n+1} - \phi^n$ est un vecteur de la différence, $R^n = q - A\phi^n$ est un vecteur de l'erreur (*discrepancy*), β est un paramètre itératif). Cependant ce processus itératif peut ne pas être efficace du point de vue de la vitesse de la convergence. C'est pourquoi construisons sur la base de la matrice A une famille de matrices $\{A'\}$ (mais pas une matrice modifiée A') de manière qu'une représentante concrète de cette famille dépende de certains paramètres. En variant ces paramètres (c'est-à-dire en choisissant les matrices différentes de la famille $\{A'\}$), on pourrait influencer sur la vitesse de la convergence du processus itératif $A'\delta^{n+1} = \beta R^n$.

Considérons la famille de matrices $\{A'\}$ construites sur la base de la matrice A du système (1) d'une façon suivante. Ajoutons à la partie droite de chaque équation (2) la combinaison linéaire des valeurs $\pi_{i,j,k}^1, \dots, \pi_{i,j,k}^{24}$. Compte tenu de (3) nous avons alors les formules suivantes (nous n'écrivons que la première et la dernière):

$$\begin{aligned}
a_{i,j,k} &= A_{i,j,k}^{bs} + \sum_{v=1}^{24} \lambda_v^{bs} \pi_{i,j,k}^v = A_{i,j,k}^{bs} + \lambda_1^{bs} a_{i,j,k} n_{i,j-1,k-1} + \lambda_2^{bs} d_{i,j,k} n_{i+1,j,k-1} + \lambda_3^{bs} b_{i,j,k} o_{i-1,j,k-1} + \\
&+ \lambda_4^{bs} (b_{i,j,k} p_{i-1,j,k-1} + c_{i,j,k} o_{i,j,k-1}) + \lambda_5^{bs} (c_{i,j,k} r_{i,j,k-1} + d_{i,j,k} p_{i+1,j,k-1} + e_{i,j,k} n_{i,j+1,k-1}) + \\
&+ \lambda_6^{bs} d_{i,j,k} r_{i+1,j,k-1} + \lambda_7^{bs} e_{i,j,k} o_{i,j+1,k-1} + \lambda_8^{bs} e_{i,j,k} p_{i,j+1,k-1} + \lambda_9^{bs} e_{i,j,k} r_{i,j+1,k-1} + \lambda_{10}^{bs} a_{i,j,k} s_{i,j-1,k-1} + \\
&+ \lambda_{11}^{bs} h_{i,j,k} n_{i+1,j-1,k} + \lambda_{12}^{bs} (b_{i,j,k} t_{i-1,j,k-1} + f_{i,j,k} o_{i-1,j-1,k}) + \lambda_{13}^{bs} (d_{i,j,k} v_{i+1,j,k-1} + h_{i,j,k} r_{i+1,j-1,k}) + \\
&+ \lambda_{14}^{bs} l_{i,j,k} o_{i-1,j,k} + \lambda_{15}^{bs} e_{i,j,k} w_{i,j+1,k-1} + \lambda_{16}^{bs} f_{i,j,k} s_{i-1,j-1,k} + \lambda_{17}^{bs} g_{i,j,k} s_{i,j-1,k} + \lambda_{18}^{bs} h_{i,j,k} s_{i+1,j-1,k} + \\
&+ \lambda_{19}^{bs} f_{i,j,k} t_{i-1,j-1,k} + \lambda_{20}^{bs} (f_{i,j,k} u_{i-1,j-1,k} + g_{i,j,k} t_{i,j-1,k} + l_{i,j,k} s_{i-1,j,k}) + \\
&+ \lambda_{21}^{bs} (g_{i,j,k} v_{i,j-1,k} + h_{i,j,k} u_{i+1,j-1,k}) + \lambda_{22}^{bs} h_{i,j,k} v_{i+1,j-1,k} + \lambda_{23}^{bs} l_{i,j,k} t_{i-1,j,k} + \lambda_{24}^{bs} l_{i,j,k} w_{i-1,j,k}, \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{4_1}$$

$$\begin{aligned}
m_{i,j,k} w_{i,j,k} &= A_{i,j,k}^{fn} + \sum_{v=1}^{24} \lambda_v^{fn} \pi_{i,j,k}^v = A_{i,j,k}^{fn} + \lambda_1^{fn} a_{i,j,k} n_{i,j-1,k-1} + \lambda_2^{fn} d_{i,j,k} n_{i+1,j,k-1} + \\
&+ \lambda_3^{fn} b_{i,j,k} o_{i-1,j,k-1} + \lambda_4^{fn} (b_{i,j,k} p_{i-1,j,k-1} + c_{i,j,k} o_{i,j,k-1}) + \\
&+ \lambda_5^{fn} (c_{i,j,k} r_{i,j,k-1} + d_{i,j,k} p_{i+1,j,k-1} + e_{i,j,k} n_{i,j+1,k-1}) + \lambda_6^{fn} d_{i,j,k} r_{i+1,j,k-1} + \lambda_7^{fn} e_{i,j,k} o_{i,j+1,k-1} + \\
&+ \lambda_8^{fn} e_{i,j,k} p_{i,j+1,k-1} + \lambda_9^{fn} e_{i,j,k} r_{i,j+1,k-1} + \lambda_{10}^{fn} a_{i,j,k} s_{i,j-1,k-1} + \lambda_{11}^{fn} h_{i,j,k} n_{i+1,j-1,k} + \\
&+ \lambda_{12}^{fn} (b_{i,j,k} t_{i-1,j,k-1} + f_{i,j,k} o_{i-1,j-1,k}) + \lambda_{13}^{fn} (d_{i,j,k} v_{i+1,j,k-1} + h_{i,j,k} r_{i+1,j-1,k}) + \lambda_{14}^{fn} l_{i,j,k} o_{i-1,j,k} + \\
&+ \lambda_{15}^{fn} e_{i,j,k} w_{i,j+1,k-1} + \lambda_{16}^{fn} f_{i,j,k} s_{i-1,j-1,k} + \lambda_{17}^{fn} g_{i,j,k} s_{i,j-1,k} + \lambda_{18}^{fn} h_{i,j,k} s_{i+1,j-1,k} + \lambda_{19}^{fn} f_{i,j,k} t_{i-1,j-1,k} + \\
&+ \lambda_{20}^{fn} (f_{i,j,k} u_{i-1,j-1,k} + g_{i,j,k} t_{i,j-1,k} + l_{i,j,k} s_{i-1,j,k}) + \lambda_{21}^{fn} (g_{i,j,k} v_{i,j-1,k} + h_{i,j,k} u_{i+1,j-1,k}) + \\
&+ \lambda_{22}^{fn} h_{i,j,k} v_{i+1,j-1,k} + \lambda_{23}^{fn} l_{i,j,k} t_{i-1,j,k} + \lambda_{24}^{fn} l_{i,j,k} w_{i-1,j,k}.
\end{aligned} \tag{4_{19}}$$

Les coefficients $\lambda_1^{bs}, \dots, \lambda_{24}^{bs}, \dots, \lambda_1^{fn}, \dots, \lambda_{24}^{fn}$ varient au passage d'un nœud de la grille à un autre, mais restreignons-nous au cas où ils ne dépendraient pas du numéro d'un nœud (i, j, k) . Chaque équation (4) est linéaire par rapport aux inconnus $a_{i,j,k}, b_{i,j,k}, c_{i,j,k}, d_{i,j,k}, e_{i,j,k}, f_{i,j,k}, g_{i,j,k}, h_{i,j,k}, l_{i,j,k}$. C'est pourquoi on peut déduire (*deduce* mais pas *deduct*) des équations (4₁)–(4₉) les expressions analytiques explicites pour déterminer ces valeurs. Ensuite en utilisant les $a_{i,j,k}, b_{i,j,k}, c_{i,j,k}, d_{i,j,k}, e_{i,j,k}, f_{i,j,k}, g_{i,j,k}, h_{i,j,k}, l_{i,j,k}$ déjà connus dans les (4₁₀)–(4₁₉), calculons les $m_{i,j,k}, n_{i,j,k}, o_{i,j,k}, p_{i,j,k}, r_{i,j,k}, s_{i,j,k}, t_{i,j,k}, u_{i,j,k}, v_{i,j,k}, w_{i,j,k}$. Ainsi chaque matrice de $\{A'\}$ se développe aisément en produit des matrices triangulaires, inférieure L et supérieure U , bien raréfiées, dont la structure est montrée sur fig.2, a et b. Une représentante concrète de la famille de matrices $\{A'\}$ est déterminée par un vecteur concret de 456 éléments $(\lambda_1^{bs}, \dots, \lambda_{24}^{bs}, \dots, \lambda_1^{fn}, \dots, \lambda_{24}^{fn})$ (ici 456=19x24). L'étendue des valeurs admissibles $\lambda_1^{bs}, \dots, \lambda_{24}^{bs}, \dots, \lambda_1^{fn}, \dots, \lambda_{24}^{fn}$ est pratiquement limitée et dépend d'un problème concret.

La recherche de la combinaison optimale de 456 paramètres, qui fournit la vitesse la plus haute de la convergence, est un problème extraordinairement complexe. Outre cela, en cas général cette recherche doit avoir lieu pour chaque itération. Pour simplifier le problème construisons la sous-famille de la famille de matrices $\{A'\}$, dont les éléments dépendent d'un paramètre α et sont proches de la matrice A en sens certain.

Le poncif déterminé par la matrice modifiée A' est montré sur fig.4. Les nœuds correspondants à l'équation de départ aux différences finies sont marqués comme les ronds, les nœuds entraînés par les éléments complémentaires non nuls de la matrice A' sont marqués comme les croix. Utilisons le procédé de l'élimination partielle des membres complémentaires pour diminuer l'influence de ces nouveaux nœuds. Pour cela exprimons la valeur de la fonction φ dans le nœud correspondant à un élément complémentaire de la matrice A' par les valeurs de φ dans les nœuds du poncif de 7 points à l'aide du développement en série de Taylor. Nous utilisons le poncif de 7 points pour que les formules pour le schéma de 19 points contiennent celles pour le schéma de 7 points comme un cas particulier. En négligeant les membres des deuxième et plus hauts ordres, nous avons:

$$\varphi_1 = \varphi_{i+1,j-1,k-1} \approx -2\varphi_{i,j,k} + \varphi_{i+1,j,k} + \varphi_{i,j-1,k} + \varphi_{i,j,k-1} = D_1,$$

$$\varphi_2 = \varphi_{i+2,j,k-1} \approx -2\varphi_{i,j,k} + 2\varphi_{i+1,j,k} + \varphi_{i,j,k-1} = D_2,$$

$$\varphi_3 = \varphi_{i-2,j+1,k-1} \approx -3\varphi_{i,j,k} + 2\varphi_{i-1,j,k} + \varphi_{i,j+1,k} + \varphi_{i,j,k-1} = D_3,$$

$$\varphi_4 = \varphi_{i-1,j+1,k-1} \approx -2\varphi_{i,j,k} + \varphi_{i-1,j,k} + \varphi_{i,j+1,k} + \varphi_{i,j,k-1} = D_4,$$

$$\varphi_5 = \varphi_{i+1,j+1,k-1} \approx -2\varphi_{i,j,k} + \varphi_{i+1,j,k} + \varphi_{i,j+1,k} + \varphi_{i,j,k-1} = D_5,$$

$$\varphi_6 = \varphi_{i+2,j+1,k-1} \approx -3\varphi_{i,j,k} + 2\varphi_{i+1,j,k} + \varphi_{i,j+1,k} + \varphi_{i,j,k-1} = D_6,$$

$$\varphi_7 = \varphi_{i-1,j+2,k-1} \approx -3\varphi_{i,j,k} + \varphi_{i-1,j,k} + 2\varphi_{i,j+1,k} + \varphi_{i,j,k-1} = D_7,$$

$$\varphi_8 = \varphi_{i,j+2,k-1} \approx -2\varphi_{i,j,k} + 2\varphi_{i,j+1,k} + \varphi_{i,j,k-1} = D_8,$$

$$\varphi_9 = \varphi_{i+1,j+2,k-1} \approx -3\varphi_{i,j,k} + \varphi_{i+1,j,k} + 2\varphi_{i,j+1,k} + \varphi_{i,j,k-1} = D_9,$$

$$\varphi_{10} = \varphi_{i,j-2,k} \approx -\varphi_{i,j,k} + 2\varphi_{i,j-1,k} = D_{10}, \quad \varphi_{11} = \varphi_{i+2,j-1,k} \approx -2\varphi_{i,j,k} + 2\varphi_{i+1,j,k} + \varphi_{i,j-1,k} = D_{11},$$

$$\varphi_{12} = \varphi_{i-2,j,k} \approx -\varphi_{i,j,k} + 2\varphi_{i-1,j,k} = D_{12}, \quad \varphi_{13} = \varphi_{i+2,j,k} \approx -\varphi_{i,j,k} + 2\varphi_{i+1,j,k} = D_{13},$$

$$\varphi_{14} = \varphi_{i-2,j+1,k} \approx -2\varphi_{i,j,k} + 2\varphi_{i-1,j,k} + \varphi_{i,j+1,k} = D_{14}, \quad \varphi_{15} = \varphi_{i,j+2,k} \approx -\varphi_{i,j,k} + 2\varphi_{i,j+1,k} = D_{15},$$

$$\varphi_{16} = \varphi_{i-1,j-2,k+1} \approx -3\varphi_{i,j,k} + \varphi_{i-1,j,k} + 2\varphi_{i,j-1,k} + \varphi_{i,j,k+1} = D_{16},$$

$$\varphi_{17} = \varphi_{i,j-2,k+1} \approx -2\varphi_{i,j,k} + 2\varphi_{i,j-1,k} + \varphi_{i,j,k+1} = D_{17},$$

$$\varphi_{18} = \varphi_{i+1,j-2,k+1} \approx -3\varphi_{i,j,k} + \varphi_{i+1,j,k} + 2\varphi_{i,j-1,k} + \varphi_{i,j,k+1} = D_{18},$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{19} &= \varphi_{i-2,j-1,k+1} \approx -3\varphi_{i,j,k} + 2\varphi_{i-1,j,k} + \varphi_{i,j-1,k} + \varphi_{i,j,k+1} = D_{19}, \\
\varphi_{20} &= \varphi_{i-1,j-1,k+1} \approx -2\varphi_{i,j,k} + \varphi_{i-1,j,k} + \varphi_{i,j-1,k} + \varphi_{i,j,k+1} = D_{20}, \\
\varphi_{21} &= \varphi_{i+1,j-1,k+1} \approx -2\varphi_{i,j,k} + \varphi_{i+1,j,k} + \varphi_{i,j-1,k} + \varphi_{i,j,k+1} = D_{21}, \\
\varphi_{22} &= \varphi_{i+2,j-1,k+1} \approx -3\varphi_{i,j,k} + 2\varphi_{i+1,j,k} + \varphi_{i,j-1,k} + \varphi_{i,j,k+1} = D_{22}, \\
\varphi_{23} &= \varphi_{i-2,j,k+1} \approx -2\varphi_{i,j,k} + 2\varphi_{i-1,j,k} + \varphi_{i,j,k+1} = D_{23}, \\
\varphi_{24} &= \varphi_{i-1,j+1,k+1} \approx -2\varphi_{i,j,k} + \varphi_{i-1,j,k} + \varphi_{i,j+1,k} + \varphi_{i,j,k+1} = D_{24}.
\end{aligned}$$

Considérons la modification suivante du schéma (1):

$$\begin{aligned}
&A_{i,j,k}^{bs} \varphi_{i,j-1,k-1} + A_{i,j,k}^{bw} \varphi_{i-1,j,k-1} + A_{i,j,k}^b \varphi_{i,j,k-1} + A_{i,j,k}^{be} \varphi_{i+1,j,k-1} + A_{i,j,k}^{bn} \varphi_{i,j+1,k-1} + A_{i,j,k}^{sw} \varphi_{i-1,j-1,k} + \\
&+ A_{i,j,k}^s \varphi_{i,j-1,k} + A_{i,j,k}^{se} \varphi_{i+1,j-1,k} + A_{i,j,k}^w \varphi_{i-1,j,k} + A_{i,j,k}^p \varphi_{i,j,k} + A_{i,j,k}^e \varphi_{i+1,j,k} + A_{i,j,k}^{mw} \varphi_{i-1,j+1,k} + \\
&+ A_{i,j,k}^n \varphi_{i,j+1,k} + A_{i,j,k}^{ne} \varphi_{i+1,j+1,k} + A_{i,j,k}^{fs} \varphi_{i,j-1,k+1} + A_{i,j,k}^{fw} \varphi_{i-1,j,k+1} + A_{i,j,k}^f \varphi_{i,j,k+1} + A_{i,j,k}^{fe} \varphi_{i+1,j,k+1} + \\
&+ A_{i,j,k}^{fn} \varphi_{i,j+1,k+1} + \sum_{\lambda=1}^{24} \pi_{i,j,k}^{\lambda} (\varphi_{\lambda} - \alpha D_{\lambda}) = Q_{i,j,k},
\end{aligned}$$

où α est un paramètre. Dans cette équation aux différences finies les membres D_{λ} ($\lambda=1, \dots, 24$) dépendent des valeurs de la fonction φ dans les nœuds du poncif de 7 points. C'est pourquoi avant de construire le LU -développement de la matrice modifiée A' , il est nécessaire de regrouper dûment les membres. Après tel regroupement les équations prennent la forme:

$$\begin{aligned}
&A_{i,j,k}^{bs} \varphi_{i,j-1,k-1} + A_{i,j,k}^{bw} \varphi_{i-1,j,k-1} + \bar{A}_{i,j,k}^b \varphi_{i,j,k-1} + A_{i,j,k}^{be} \varphi_{i+1,j,k-1} + A_{i,j,k}^{bn} \varphi_{i,j+1,k-1} + A_{i,j,k}^{sw} \varphi_{i-1,j-1,k} + \\
&+ \bar{A}_{i,j,k}^s \varphi_{i,j-1,k} + A_{i,j,k}^{se} \varphi_{i+1,j-1,k} + \bar{A}_{i,j,k}^w \varphi_{i-1,j,k} + \bar{A}_{i,j,k}^p \varphi_{i,j,k} + \bar{A}_{i,j,k}^e \varphi_{i+1,j,k} + A_{i,j,k}^{mw} \varphi_{i-1,j+1,k} + \\
&+ \bar{A}_{i,j,k}^n \varphi_{i,j+1,k} + A_{i,j,k}^{ne} \varphi_{i+1,j+1,k} + A_{i,j,k}^{fs} \varphi_{i,j-1,k+1} + A_{i,j,k}^{fw} \varphi_{i-1,j,k+1} + \bar{A}_{i,j,k}^f \varphi_{i,j,k+1} + A_{i,j,k}^{fe} \varphi_{i+1,j,k+1} + \\
&+ A_{i,j,k}^{fn} \varphi_{i,j+1,k+1} + \sum_{\lambda=1}^{24} \pi_{i,j,k}^{\lambda} \varphi_{\lambda} = Q_{i,j,k},
\end{aligned}$$

où les coefficients à trait sont:

$$\begin{aligned}
\bar{A}_{i,j,k}^b &= A_{i,j,k}^b - \alpha \sum_{\lambda=1}^9 \pi_{i,j,k}^{\lambda}, \\
\bar{A}_{i,j,k}^s &= A_{i,j,k}^s - \alpha \left(\pi_{i,j,k}^1 + 2\pi_{i,j,k}^{10} + \pi_{i,j,k}^{11} + 2 \sum_{\lambda=16}^{18} \pi_{i,j,k}^{\lambda} + \sum_{\lambda=19}^{22} \pi_{i,j,k}^{\lambda} \right), \\
\bar{A}_{i,j,k}^w &= A_{i,j,k}^w - \alpha \left(\sum_{\lambda=3,19,23} (2\pi_{i,j,k}^{\lambda} + \pi_{i,j,k}^{\lambda+1}) + 2 \sum_{\lambda=12,14} \pi_{i,j,k}^{\lambda} + \sum_{\lambda=7,16} \pi_{i,j,k}^{\lambda} \right), \\
\bar{A}_{i,j,k}^p &= A_{i,j,k}^p + \alpha \left(\sum_{\lambda=1,4} (2\pi_{i,j,k}^{\lambda} + 2\pi_{i,j,k}^{\lambda+1} + 3\pi_{i,j,k}^{\lambda+2}) + \sum_{\lambda=7,16} (3\pi_{i,j,k}^{\lambda} + 2\pi_{i,j,k}^{\lambda+1} + 3\pi_{i,j,k}^{\lambda+2}) + \right. \\
&\left. + \sum_{\lambda=10,13} (\pi_{i,j,k}^{\lambda} + 2\pi_{i,j,k}^{\lambda+1} + \pi_{i,j,k}^{\lambda+2}) + \sum_{\lambda=19,22} (3\pi_{i,j,k}^{\lambda} + 2\pi_{i,j,k}^{\lambda+1} + 2\pi_{i,j,k}^{\lambda+2}) \right), \\
\bar{A}_{i,j,k}^e &= A_{i,j,k}^e - \alpha \left(\sum_{\lambda=1,5,21} (\pi_{i,j,k}^{\lambda} + 2\pi_{i,j,k}^{\lambda+1}) + 2 \sum_{\lambda=11,13} \pi_{i,j,k}^{\lambda} + \sum_{\lambda=9,18} \pi_{i,j,k}^{\lambda} \right), \\
\bar{A}_{i,j,k}^n &= A_{i,j,k}^n - \alpha \left(\sum_{\lambda=3}^6 \pi_{i,j,k}^{\lambda} + 2 \sum_{\lambda=7}^9 \pi_{i,j,k}^{\lambda} + \pi_{i,j,k}^{14} + 2\pi_{i,j,k}^{15} + \pi_{i,j,k}^{24} \right), \\
\bar{A}_{i,j,k}^f &= A_{i,j,k}^f - \alpha \sum_{\lambda=16}^{24} \pi_{i,j,k}^{\lambda}.
\end{aligned}$$

Maintenant on peut écrire la modification des équations (2):

$$\begin{aligned}
a_{i,j,k} &= A_{i,j,k}^{bs}, \\
b_{i,j,k} + a_{i,j,k} o_{i,j-1,k-1} &= A_{i,j,k}^{bw}, \\
c_{i,j,k} + a_{i,j,k} p_{i,j-1,k-1} + b_{i,j,k} n_{i-1,j,k-1} &= \bar{A}_{i,j,k}^{-b} = A_{i,j,k}^b - \alpha \sum_{\lambda=1}^9 \pi_{i,j,k}^\lambda, \\
d_{i,j,k} + a_{i,j,k} r_{i,j-1,k-1} + c_{i,j,k} n_{i,j,k-1} &= A_{i,j,k}^{be}, \\
e_{i,j,k} + b_{i,j,k} r_{i-1,j,k-1} + c_{i,j,k} p_{i,j,k-1} + d_{i,j,k} o_{i+1,j,k-1} &= A_{i,j,k}^{bn}, \\
f_{i,j,k} + a_{i,j,k} t_{i,j-1,k-1} + b_{i,j,k} s_{i-1,j,k-1} &= A_{i,j,k}^{sw}, \\
g_{i,j,k} + a_{i,j,k} u_{i,j-1,k-1} + c_{i,j,k} s_{i,j,k-1} + f_{i,j,k} n_{i-1,j-1,k} &= \bar{A}_{i,j,k}^{-s} = A_{i,j,k}^s - \\
&- \alpha \left(\pi_{i,j,k}^1 + 2\pi_{i,j,k}^{10} + \pi_{i,j,k}^{11} + 2 \sum_{\lambda=16}^{18} \pi_{i,j,k}^\lambda + \sum_{\lambda=19}^{22} \pi_{i,j,k}^\lambda \right), \\
h_{i,j,k} + a_{i,j,k} v_{i,j-1,k-1} + d_{i,j,k} s_{i+1,j,k-1} + g_{i,j,k} n_{i,j-1,k} &= A_{i,j,k}^{se}, \\
l_{i,j,k} + b_{i,j,k} u_{i-1,j,k-1} + c_{i,j,k} t_{i,j,k-1} + f_{i,j,k} p_{i-1,j-1,k} + g_{i,j,k} o_{i,j-1,k} &= \bar{A}_{i,j,k}^{-w} = A_{i,j,k}^w - \\
&- \alpha \left(\sum_{\lambda=3,19,23} (2\pi_{i,j,k}^\lambda + \pi_{i,j,k}^{\lambda+1}) + 2 \sum_{\lambda=12,14} \pi_{i,j,k}^\lambda + \sum_{\lambda=7,16} \pi_{i,j,k}^\lambda \right), \\
m_{i,j,k} + a_{i,j,k} w_{i,j-1,k-1} + b_{i,j,k} v_{i-1,j,k-1} + c_{i,j,k} u_{i,j,k-1} + d_{i,j,k} t_{i+1,j,k-1} + e_{i,j,k} s_{i,j+1,k-1} + \\
&+ f_{i,j,k} r_{i-1,j-1,k} + g_{i,j,k} p_{i,j-1,k} + h_{i,j,k} o_{i+1,j-1,k} + l_{i,j,k} n_{i-1,j,k} = \bar{A}_{i,j,k}^{-p} = A_{i,j,k}^p + \\
&+ \alpha \left(\sum_{\lambda=1,4} (2\pi_{i,j,k}^\lambda + 2\pi_{i,j,k}^{\lambda+1} + 3\pi_{i,j,k}^{\lambda+2}) + \sum_{\lambda=7,16} (3\pi_{i,j,k}^\lambda + 2\pi_{i,j,k}^{\lambda+1} + 3\pi_{i,j,k}^{\lambda+2}) + \right. \\
&\left. + \sum_{\lambda=10,13} (\pi_{i,j,k}^\lambda + 2\pi_{i,j,k}^{\lambda+1} + \pi_{i,j,k}^{\lambda+2}) + \sum_{\lambda=19,22} (3\pi_{i,j,k}^\lambda + 2\pi_{i,j,k}^{\lambda+1} + 2\pi_{i,j,k}^{\lambda+2}) \right), \\
m_{i,j,k} n_{i,j,k} + c_{i,j,k} v_{i,j,k-1} + d_{i,j,k} u_{i+1,j,k-1} + g_{i,j,k} r_{i,j-1,k} + h_{i,j,k} p_{i+1,j-1,k} &= \bar{A}_{i,j,k}^{-e} = A_{i,j,k}^e - \\
&- \alpha \left(\sum_{\lambda=1,5,21} (\pi_{i,j,k}^\lambda + 2\pi_{i,j,k}^{\lambda+1}) + 2 \sum_{\lambda=11,13} \pi_{i,j,k}^\lambda + \sum_{\lambda=9,18} \pi_{i,j,k}^\lambda \right), \\
m_{i,j,k} o_{i,j,k} + b_{i,j,k} w_{i-1,j,k-1} + e_{i,j,k} t_{i,j+1,k-1} + l_{i,j,k} p_{i-1,j,k} &= A_{i,j,k}^{mw}, \\
m_{i,j,k} p_{i,j,k} + c_{i,j,k} w_{i,j,k-1} + e_{i,j,k} u_{i,j+1,k-1} + l_{i,j,k} r_{i-1,j,k} &= \bar{A}_{i,j,k}^{-n} = A_{i,j,k}^n - \\
&- \alpha \left(\sum_{\lambda=3}^6 \pi_{i,j,k}^\lambda + 2 \sum_{\lambda=7}^9 \pi_{i,j,k}^\lambda + \pi_{i,j,k}^{14} + 2\pi_{i,j,k}^{15} + \pi_{i,j,k}^{24} \right), \\
m_{i,j,k} r_{i,j,k} + d_{i,j,k} w_{i+1,j,k-1} + e_{i,j,k} v_{i,j+1,k-1} &= A_{i,j,k}^{ne}, \\
m_{i,j,k} s_{i,j,k} + f_{i,j,k} v_{i-1,j-1,k} + g_{i,j,k} u_{i,j-1,k} + h_{i,j,k} t_{i+1,j-1,k} &= A_{i,j,k}^{fs}, \\
m_{i,j,k} t_{i,j,k} + f_{i,j,k} w_{i-1,j-1,k} + l_{i,j,k} u_{i-1,j,k} &= A_{i,j,k}^{fw}, \\
m_{i,j,k} u_{i,j,k} + g_{i,j,k} w_{i,j-1,k} + l_{i,j,k} v_{i-1,j,k} &= \bar{A}_{i,j,k}^{-f} = A_{i,j,k}^f - \alpha \sum_{\lambda=16}^{24} \pi_{i,j,k}^\lambda, \\
m_{i,j,k} v_{i,j,k} + h_{i,j,k} w_{i+1,j-1,k} &= A_{i,j,k}^{fe}, \\
m_{i,j,k} w_{i,j,k} &= A_{i,j,k}^{fn}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Les équations (5) ont la forme (4), c'est-à-dire chacune est linéaire par rapport aux inconnus $a_{i,j,k}, b_{i,j,k}, c_{i,j,k}, d_{i,j,k}, e_{i,j,k}, f_{i,j,k}, g_{i,j,k}, h_{i,j,k}, l_{i,j,k}$. C'est pourquoi compte tenu de (3) on peut déduire (*deduce* mais pas *deduct*) des neuf premières équations (5) les formules explicites pour déterminer ces valeurs:

$$\begin{aligned}
a_{i,j,k} &= A_{i,j,k}^{bs}, \quad b_{i,j,k} = A_{i,j,k}^{bw} - a_{i,j,k} o_{i,j-1,k-1}, \\
c_{i,j,k} &= \left\{ A_{i,j,k}^b - a_{i,j,k} p_{i,j-1,k-1} - b_{i,j,k} n_{i-1,j,k-1} - \alpha [a_{i,j,k} n_{i,j-1,k-1} + \right. \\
&\quad + b_{i,j,k} (o_{i-1,j,k-1} + p_{i-1,j,k-1}) + (A_{i,j,k}^{be} - a_{i,j,k} r_{i,j-1,k-1}) (n_{i+1,j,k-1} + p_{i+1,j,k-1} + r_{i+1,j,k-1}) + \\
&\quad + (A_{i,j,k}^{bn} - b_{i,j,k} r_{i-1,j,k-1} - (A_{i,j,k}^{be} - a_{i,j,k} r_{i,j-1,k-1}) o_{i+1,j,k-1}) (n_{i,j+1,k-1} + o_{i,j+1,k-1} + \\
&\quad + p_{i,j+1,k-1} + r_{i,j+1,k-1}) \left. \right\} / \left\{ 1 + \alpha [o_{i,j,k-1} + r_{i,j,k-1} - n_{i,j,k-1} (n_{i+1,j,k-1} + p_{i+1,j,k-1} + \right. \\
&\quad + r_{i+1,j,k-1}) - (p_{i,j,k-1} - n_{i,j,k-1} o_{i+1,j,k-1}) (n_{i,j+1,k-1} + o_{i,j+1,k-1} + p_{i,j+1,k-1} + r_{i,j+1,k-1}) \left. \right\}, \\
d_{i,j,k} &= A_{i,j,k}^{be} - a_{i,j,k} r_{i,j-1,k-1} - c_{i,j,k} n_{i,j,k-1}, \\
e_{i,j,k} &= A_{i,j,k}^{bn} - b_{i,j,k} r_{i-1,j,k-1} - c_{i,j,k} p_{i,j,k-1} - d_{i,j,k} o_{i+1,j,k-1}, \\
f_{i,j,k} &= A_{i,j,k}^{sw} - a_{i,j,k} t_{i,j-1,k-1} - b_{i,j,k} s_{i-1,j,k-1}, \\
g_{i,j,k} &= \left\{ A_{i,j,k}^s - a_{i,j,k} u_{i,j-1,k-1} - c_{i,j,k} s_{i,j,k-1} - f_{i,j,k} n_{i-1,j-1,k} - \alpha [a_{i,j,k} (n_{i,j-1,k-1} + \right. \\
&\quad + 2s_{i,j-1,k-1}) + (A_{i,j,k}^{se} - a_{i,j,k} v_{i,j-1,k-1} - d_{i,j,k} s_{i+1,j,k-1}) (n_{i+1,j-1,k} + 2s_{i+1,j-1,k} + \\
&\quad + u_{i+1,j-1,k} + v_{i+1,j-1,k}) + f_{i,j,k} (2s_{i-1,j-1,k} + t_{i-1,j-1,k} + u_{i-1,j-1,k}) + \\
&\quad + (A_{i,j,k}^w - b_{i,j,k} u_{i-1,j,k-1} - c_{i,j,k} t_{i,j,k-1} - f_{i,j,k} p_{i-1,j-1,k} - \\
&\quad - \alpha (b_{i,j,k} (2o_{i-1,j,k-1} + p_{i-1,j,k-1} + 2t_{i-1,j,k-1}) + c_{i,j,k} o_{i,j,k-1} + e_{i,j,k} o_{i,j+1,k-1} + \\
&\quad + f_{i,j,k} (2o_{i-1,j-1,k} + s_{i-1,j-1,k} + 2t_{i-1,j-1,k} + u_{i-1,j-1,k})) s_{i-1,j,k} / (1 + \alpha (2o_{i-1,j,k} + s_{i-1,j,k} + \\
&\quad + 2t_{i-1,j,k} + w_{i-1,j,k})) \left. \right\} / \left\{ 1 + \alpha [2s_{i,j-1,k} + t_{i,j-1,k} + v_{i,j-1,k} - \right. \\
&\quad - (o_{i,j-1,k} + \alpha t_{i,j-1,k}) s_{i-1,j,k} / (1 + \alpha (2o_{i-1,j,k} + s_{i-1,j,k} + 2t_{i-1,j,k} + w_{i-1,j,k})) - \\
&\quad \left. - n_{i,j-1,k} (n_{i+1,j-1,k} + 2s_{i+1,j-1,k} + u_{i+1,j-1,k} + v_{i+1,j-1,k}) \right\}, \tag{6}
\end{aligned}$$

$$h_{i,j,k} = A_{i,j,k}^{se} - a_{i,j,k} v_{i,j-1,k-1} - d_{i,j,k} s_{i+1,j,k-1} - g_{i,j,k} n_{i,j-1,k},$$

$$\begin{aligned}
l_{i,j,k} &= \left\{ A_{i,j,k}^w - b_{i,j,k} u_{i-1,j,k-1} - c_{i,j,k} t_{i,j,k-1} - f_{i,j,k} p_{i-1,j-1,k} - g_{i,j,k} o_{i,j-1,k} - \right. \\
&\quad - \alpha [b_{i,j,k} (2o_{i-1,j,k-1} + p_{i-1,j,k-1} + 2t_{i-1,j,k-1}) + c_{i,j,k} o_{i,j,k-1} + e_{i,j,k} o_{i,j+1,k-1} + \\
&\quad + f_{i,j,k} (2o_{i-1,j-1,k} + s_{i-1,j-1,k} + 2t_{i-1,j-1,k} + u_{i-1,j-1,k}) + \\
&\quad \left. + g_{i,j,k} t_{i,j-1,k} \right\} / \left\{ 1 + \alpha [2o_{i-1,j,k} + s_{i-1,j,k} + 2t_{i-1,j,k} + w_{i-1,j,k}] \right\}.
\end{aligned}$$

Quand les $a_{i,j,k}, b_{i,j,k}, c_{i,j,k}, d_{i,j,k}, e_{i,j,k}, f_{i,j,k}, g_{i,j,k}, h_{i,j,k}, l_{i,j,k}$ sont calculés, on calcule les éléments complémentaires à l'aide des formules (3). Ensuite on utilise ces valeurs pour déterminer $m_{i,j,k}, n_{i,j,k}, o_{i,j,k}, p_{i,j,k}, r_{i,j,k}, s_{i,j,k}, t_{i,j,k}, u_{i,j,k}, v_{i,j,k}, w_{i,j,k}$. Les formules explicites pour calculer ces valeurs sont:

$$\begin{aligned}
m_{i,j,k} &= A_{i,j,k}^p - a_{i,j,k} w_{i,j-1,k-1} - b_{i,j,k} v_{i-1,j,k-1} - c_{i,j,k} u_{i,j,k-1} - d_{i,j,k} t_{i+1,j,k-1} - \\
&\quad - e_{i,j,k} s_{i,j+1,k-1} - f_{i,j,k} r_{i-1,j-1,k} - g_{i,j,k} p_{i,j-1,k} - h_{i,j,k} o_{i+1,j-1,k} - l_{i,j,k} n_{i-1,j,k} + \\
&\quad + \alpha \left[\sum_{\beta=1,4} (2\pi_{i,j,k}^\beta + 2\pi_{i,j,k}^{\beta+1} + 3\pi_{i,j,k}^{\beta+2}) + \sum_{\beta=7,16} (3\pi_{i,j,k}^\beta + 2\pi_{i,j,k}^{\beta+1} + 3\pi_{i,j,k}^{\beta+2}) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\beta=10,13} (\pi_{i,j,k}^\beta + 2\pi_{i,j,k}^{\beta+1} + \pi_{i,j,k}^{\beta+2}) + \sum_{\beta=19,22} (3\pi_{i,j,k}^\beta + 2\pi_{i,j,k}^{\beta+1} + 2\pi_{i,j,k}^{\beta+2}) \right], \tag{7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_{i,j,k} &= \left\{ A_{i,j,k}^e - c_{i,j,k} v_{i,j,k-1} - d_{i,j,k} u_{i+1,j,k-1} - g_{i,j,k} r_{i,j-1,k} - h_{i,j,k} p_{i+1,j-1,k} - \right. \\
&\quad \left. - \alpha \left[\sum_{\beta=1,5,21} (\pi_{i,j,k}^\beta + 2\pi_{i,j,k}^{\beta+1}) + 2 \sum_{\beta=11,13} \pi_{i,j,k}^\beta + \sum_{\beta=9,18} \pi_{i,j,k}^\beta \right] \right\} / m_{i,j,k}, \\
o_{i,j,k} &= \left\{ A_{i,j,k}^{mw} - b_{i,j,k} w_{i-1,j,k-1} - e_{i,j,k} t_{i,j+1,k-1} - l_{i,j,k} p_{i-1,j,k} \right\} / m_{i,j,k}, \\
p_{i,j,k} &= \left\{ A_{i,j,k}^n - c_{i,j,k} w_{i,j,k-1} - e_{i,j,k} u_{i,j+1,k-1} - l_{i,j,k} r_{i-1,j,k} - \right. \\
&\quad \left. - \alpha \left[\sum_{\beta=3}^6 \pi_{i,j,k}^\beta + 2 \sum_{\beta=7}^9 \pi_{i,j,k}^\beta + \pi_{i,j,k}^{14} + 2\pi_{i,j,k}^{15} + \pi_{i,j,k}^{24} \right] \right\} / m_{i,j,k}, \\
r_{i,j,k} &= \left\{ A_{i,j,k}^{ne} - d_{i,j,k} w_{i+1,j,k-1} - e_{i,j,k} v_{i,j+1,k-1} \right\} / m_{i,j,k}, \\
s_{i,j,k} &= \left\{ A_{i,j,k}^{fs} - f_{i,j,k} v_{i-1,j-1,k} - g_{i,j,k} u_{i,j-1,k} - h_{i,j,k} t_{i+1,j-1,k} \right\} / m_{i,j,k}, \\
t_{i,j,k} &= \left\{ A_{i,j,k}^{fw} - f_{i,j,k} w_{i-1,j-1,k} - l_{i,j,k} u_{i-1,j,k} \right\} / m_{i,j,k}, \\
u_{i,j,k} &= \left\{ A_{i,j,k}^f - g_{i,j,k} w_{i,j-1,k} - l_{i,j,k} v_{i-1,j,k} - \alpha \sum_{\beta=16}^{24} \pi_{i,j,k}^\beta \right\} / m_{i,j,k}, \\
v_{i,j,k} &= \left\{ A_{i,j,k}^{fe} - h_{i,j,k} w_{i+1,j-1,k} \right\} / m_{i,j,k}, \\
w_{i,j,k} &= A_{i,j,k}^{fn} / m_{i,j,k}. \tag{7}
\end{aligned}$$

Après avoir appliqué les formules (6), (3), (7) à tous les nœuds de la grille, nous déterminons tous les éléments des matrices triangulaires, inférieure L et supérieure U , dont le produit est la matrice modifiée A' .

Le deuxième paragraphe du premier chapitre contient la description de la procédure de calcul en cas du schéma de 7 points qui est plus simple que celui de 19 points. Les formules de calcul pour le schéma de 7 points sont un cas particulier de celles pour le schéma de 19 points et résultent de celles-ci après l'annulation de membres certains. En cas du schéma de 7 points

$$\begin{aligned}
A_{i,j,k}^{bs} &= A_{i,j,k}^{bw} = A_{i,j,k}^{be} = A_{i,j,k}^{bn} = A_{i,j,k}^{sw} = A_{i,j,k}^{se} = \\
&= A_{i,j,k}^{nw} = A_{i,j,k}^{ne} = A_{i,j,k}^{fs} = A_{i,j,k}^{fw} = A_{i,j,k}^{fe} = A_{i,j,k}^{fn} = 0,
\end{aligned}$$

d'où

$$a_{i,j,k} = b_{i,j,k} = f_{i,j,k} = r_{i,j,k} = v_{i,j,k} = w_{i,j,k} = 0$$

et

$$\begin{aligned}
\pi_{i,j,k}^1 &= \pi_{i,j,k}^3 = \pi_{i,j,k}^6 = \pi_{i,j,k}^9 = \pi_{i,j,k}^{10} = \pi_{i,j,k}^{12} = \\
&= \pi_{i,j,k}^{13} = \pi_{i,j,k}^{15} = \pi_{i,j,k}^{16} = \pi_{i,j,k}^{19} = \pi_{i,j,k}^{22} = \pi_{i,j,k}^{24} = 0.
\end{aligned}$$

La matrice A' construite de cette façon se développe aisément en produit des matrices triangulaires, inférieure et supérieure, bien raréfiées. C'est pourquoi la méthode itérative de la résolution du système d'équations linéaires algébriques, laquelle a l'air comme ça: $A' \delta^{n+1} = \beta R^n$, sera efficace du point de vue de la dépense de temps machine pour une itération ($\delta^{n+1} = \phi^{n+1} - \phi^n$ est un vecteur de la différence, $R^n = q - A\phi^n$ est un vecteur de l'erreur (*discrepancy*), β est un paramètre itératif). Il importe de trouver une combinaison des paramètres α et β telle que ce processus itératif soit efficace du point de vue de la vitesse de la convergence aussi. L'étendue des valeurs admissibles α et β est pratiquement limitée et dépend d'un problème concret.

Le deuxième chapitre de la thèse est consacré à l'étude numérique des écoulements spatiaux de gaz dans les tuyères à géométrie diverse. On considère le modèle de l'écoulement spatial stationnaire irrotationnel de gaz idéal parfait. Cet écoulement est décrit par une

équation du potentiel des vitesses, avec cela toutes les fonctions aérodynamiques sont exprimées par une fonction du potentiel φ . Le problème est posé mathématiquement parlant dans le premier paragraphe du deuxième chapitre. L'équation du potentiel des vitesses dans le système des coordonnées cylindriques x, r, ε est suivante:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho r \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\rho \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} \right) = 0.$$

Rapportons les dimensions de longueur à une longueur caractéristique certaine l_* , la vitesse et la densité à leurs valeurs à col a_* et ρ_* , la pression à $\rho_* a_*^2$, nous avons alors de l'intégrale de Bernoulli et de la condition de conservation d'entropie la dépendance pour la densité du potentiel:

$$\rho = \left(\frac{\gamma+1}{2} - \frac{\gamma-1}{2} \left(\varphi_x^2 + \varphi_r^2 + \frac{1}{r^2} \varphi_\varepsilon^2 \right) \right)^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

et la dépendance pour la pression de la densité (et du potentiel, par conséquent):

$$p = \frac{\rho^\gamma}{\gamma}.$$

Où γ est un exposant adiabatique.

Aux frontières du domaine physique de l'écoulement il faut poser les conditions complémentaires de la bonne façon. Posons que le vecteur vitesse à l'entrée à une tuyère est orthogonal à la section initiale $x = a$. En conséquence de cela la valeur φ à l'entrée est constante, soit: $\varphi = 0$. A la surface de la tuyère $r = f(x, \varepsilon)$ posons la condition d'imperméabilité: $\varphi_r = f_x \varphi_x + \frac{f_\varepsilon}{f^2} \varphi_\varepsilon$. Aux plans de symétrie $\varepsilon = 0$ et $\varepsilon = \varepsilon^*$ posons la condition de symétrie: $\varphi_\varepsilon = 0$.

A l'aide du remplacement des variables indépendantes $\xi = \xi(x), \eta = \frac{r}{f(x, \varepsilon)}, \theta = \theta(\varepsilon)$

passons du domaine physique de l'écoulement (à géométrie complexe) au domaine de calcul (qui est un parallélépipède rectangulaire borné par les plans $\xi = \xi(a), \xi = \xi(b), \eta = 0, \eta = 1, \theta = \theta(0), \theta = \theta(\varepsilon^*)$, où $x = b$ est une coordonnée de la section de sortie de la tuyère). Utilisons une grille de calcul uniforme (telle que ses cellules soient des parallélépipèdes rectangulaires de dimension égale). Utilisons un remplacement des coordonnées tel qu'une grille de calcul ait de la condensation dans les coordonnées physiques dans les domaines du fort changement des paramètres aérodynamiques. L'équation du potentiel des vitesses dans les nouvelles variables ξ, η, θ a une forme suivante:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\rho r U}{\mathfrak{S}} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\rho r V}{\mathfrak{S}} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\rho W}{\mathfrak{S}} \right) = 0. \quad (8)$$

Où

$$U = \varphi_\xi \xi_x^2 - \varphi_\eta \xi_x \frac{\eta f_x}{f}, \quad V = -\varphi_\xi \xi_x \frac{\eta f_x}{f} + \varphi_\eta \left(\frac{\eta^2 f_x^2}{f^2} + \frac{1}{f^2} + \frac{f_\varepsilon^2}{f^4} \right) - \varphi_\theta \theta_\varepsilon \frac{f_\varepsilon}{\eta f^3}, \quad (9)$$

$$W = -\varphi_\eta \theta_\varepsilon \frac{f_\varepsilon}{f^2} + \varphi_\theta \theta_\varepsilon^2 \frac{1}{\eta f}, \quad \mathfrak{S} = \frac{\xi_x \theta_\varepsilon}{f}.$$

L'expression pour la densité dans les nouvelles variables ξ, η, θ est suivante

$$\rho = \left(\frac{\gamma+1}{2} - \frac{\gamma-1}{2} \left(U \varphi_\xi + V \varphi_\eta + W \frac{\varphi_\theta}{r} \right) \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad (10)$$

où $r = \eta f$.

Les conditions aux frontières dans les variables ξ, η, θ sont suivantes:

$$\text{a) à l'entrée } (\xi = \xi(a)): \quad \varphi = 0, \quad (11_1)$$

$$\text{b) à la surface de la tuyère } (\eta = 1): \quad V = 0, \quad (11_2)$$

$$\text{c) aux plans } \theta = \theta(0) \text{ et } \theta = \theta(\varepsilon^*): \quad W = 0. \quad (11_3)$$

Il faut trouver la fonction $\varphi(\xi, \eta, \theta)$ déterminée sur l'ensemble $\{\xi(a) \leq \xi \leq \xi(b), 0 < \eta \leq 1, \theta(0) \leq \theta \leq \theta(\varepsilon^*)\}$ et satisfaisant à l'équation (8), (9), (10) et aux conditions aux frontières (11).

La MPIM créée dans le premier chapitre est affectée à la résolution des équations aux différences finies approximant une équation différentielle linéaire aux dérivées partielles de type elliptique. L'équation complète du potentiel des vitesses est quasi linéaire de type mixte, c'est pourquoi les méthodes créées pour les équations linéaires elliptiques ne peuvent pas être directement appliquées à la résolution d'une équation du potentiel. L'algorithme de la résolution d'une équation du potentiel par la méthode parfaitement implicite modifiée sur la base du schéma de 7 points est décrit dans le deuxième paragraphe du deuxième chapitre et les résultats de l'étude des écoulements spatiaux de gaz dans les tuyères à géométrie diverse se trouvent ibidem.

Le schéma conservatif du deuxième ordre d'approximation pour l'équation (8) peut être écrit comme ça:

$$\frac{1}{\Delta\xi} \left(\tilde{F}_{i+\frac{1}{2},j,k} - \tilde{F}_{i-\frac{1}{2},j,k} \right) + \frac{1}{\Delta\eta} \left(\tilde{G}_{i,j+\frac{1}{2},k} - \tilde{G}_{i,j-\frac{1}{2},k} \right) + \frac{1}{\Delta\theta} \left(\tilde{H}_{i,j,k+\frac{1}{2}} - \tilde{H}_{i,j,k-\frac{1}{2}} \right) = 0, \quad (12)$$

où $\tilde{F} = \frac{\rho r U}{\mathfrak{S}}$, $\tilde{G} = \frac{\rho r V}{\mathfrak{S}}$, $\tilde{H} = \frac{\rho W}{\mathfrak{S}}$ sont des courants. On calcule les valeurs des courants par les dérivées du potentiel à l'aide des relations (9). On approxime ces dérivées à l'aide des différences finies centrales du deuxième ordre.

L'équation du potentiel est de type elliptique dans les domaines de l'écoulement subsonique, de type hyperbolique dans les domaines de l'écoulement supersonique, de type parabolique sur la surface sonore. Le schéma aux différences finies centrales (12) amène à des algorithmes instables dans les domaines de l'écoulement supersonique, parce qu'il transmet les troubles en amont de courant. Pour la stabilité du calcul dans le domaine de l'écoulement supersonique on utilise une correction de densité comme la compressibilité artificielle. La modification suivante de la densité

$$\tilde{\rho}_{i \pm \frac{1}{2},j,k} = \rho_{i \pm \frac{1}{2},j,k} - v \max\{0, 1 - M_{i,j,k}^{-2}\} \delta_{\xi}^{-} \rho_{i \pm \frac{1}{2},j,k} \Delta\xi,$$

où δ_{ξ}^{-} est un opérateur de différences de la première dérivée en arrière dans la direction ξ , v est un coefficient de la compressibilité artificielle et M est un nombre de Mach, cette modification apporte une erreur du premier ordre dans le schéma¹. L'introduction de la compressibilité artificielle équivaut à l'utilisation des différences finies unilatérales en direction contraire à courant à l'approximation d'une équation dans le domaine de l'écoulement supersonique. On peut introduire la densité modifiée dans les trois directions ξ, η, θ . Quelquefois nous utilisons dans la direction ξ une autre expression pour $\tilde{\rho}$:

$$\tilde{\rho}_{i \pm \frac{1}{2},j,k} = \rho_{i \pm \frac{1}{2},j,k} +$$

¹ Hafez M., South J., Murman E., Application des méthodes de compressibilité artificielle à la résolution numérique de l'équation complète du potentiel dans l'étendue transsonique de vitesses. //Technique engins et Cosmonautique. – 1979. – vol.17, №8. En russe.

$$+v \max \left\{ 0, 1 - M_{i \pm \frac{1}{2}, j, k}^{-2} \right\} (\Delta \xi)^2 \left\{ \frac{\left(\delta_{\xi}^{-} \rho_{i \pm \frac{1}{2}, j, k} \right)^2}{\rho_{i \pm \frac{1}{2}, j, k}} \left(1 - M_{i \pm \frac{1}{2}, j, k}^{-2} \right) - \delta_{\xi}^{-} \delta_{\xi}^{-} \rho_{i \pm \frac{1}{2}, j, k} \right\}$$

Cette modification de la densité, qui apporte une erreur du deuxième ordre dans le schéma, a été proposée par Veretentsev V.A.¹.

La surface d'une tuyère est déterminée par une équation suivante (dans les coordonnées rectangulaires cartésiennes)

$$\left(\frac{y}{y_+(x)} \right)^{\omega(x)} + \left(\frac{z}{z_+(x)} \right)^{\omega(x)} = 1,$$

où $y_+(x)$ est une génératrice de tuyère au plan $z = 0$, $z_+(x)$ est une génératrice de tuyère au plan $y = 0$, $\omega(x)$ est un exposant de la "super-ellipticité" de tuyère. Si $y(x) \equiv z(x)$ et que $\omega(x) \equiv 2$, la tuyère est axisymétrique.

Pour révéler la qualité de la méthode proposée (c'est-à-dire la vitesse de la convergence et l'exactitude) on a étudié d'abord des écoulements axisymétriques et spatiaux de gaz dans les tuyères à géométrie diverse (celles à un plan de symétrie, celles elliptiques et super-elliptiques) et a conféré les résultats obtenus avec ceux publiés. Fournissons quelques exemples. A titre du premier exemple on a calculé l'écoulement mixte de gaz dans la tuyère

axisymétrique² (fig.5): $\vartheta_0 = \frac{\pi}{4}$; $\vartheta_1 = \frac{\pi}{12}$; $R_0 = 3,125$; $R_1 = 1,0$; $R_2 = 0,625$; $a = -4,0$; $b = 1,0$. Sur

la fig.6 on fournit la distribution d'un nombre de Mach sur le contour (courbe 1) et sur l'axe (courbe 2) de la tuyère (grille 65x43x5), les résultats du travail mentionné sont marqués comme les croix. Sur la fig.7 on fournit la distribution de valeurs de débit ("расход"="débit") aux sections transversales de la tuyère. La courbe 1 correspond à la grille 33x22x22

$\left(0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2} \right)$, la courbe 2 – 42x22x17 $\left(0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{10} \right)$, la courbe 3 – 50x30x10 $\left(0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{10} \right)$, la

courbe 4 – 65x43x5 $\left(0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{40} \right)$. A titre du deuxième exemple on a étudié la tuyère

axisymétrique³ ayant des paramètres suivants (fig.5):

$\vartheta_0 = \frac{\pi}{4}$; $\vartheta_1 = \frac{\pi}{12}$; $R_0 = 2,2$; $R_1 = 0,7$; $R_2 = 0,625$; $a = -3,0$; $b = 0,9$. Les calculs ont été faits sur

les mêmes grilles uniformes que dans le travail mentionné: 20x6x6 (grille 1), 30x9x9 (grille 2), 40x12x12 (grille 3). Pour diminuer la norme de l'erreur (*discrepancy*) 1000 fois (par rapport à l'itération zéro) sur la grille 1 on a besoin de 62 itérations (à peu près 140 dans le travail mentionné), sur la grille 2 on a besoin de 108 itérations (à peu près 200 dans le travail mentionné), sur la grille 3 on a besoin de 194 itérations (à peu près 500 dans le travail mentionné). Les calculs complémentaires ont été faits sur les grilles plus menues (aux deux directions – axiale et radiale): 50x20x5, 65x43x5. Sur la fig.8 on fournit la distribution de valeurs de débit ("расход"="débit"). La courbe 1 correspond à la grille 40x12x12

¹ Veretentsev V.A. Etude numérique des écoulements de gaz dans les tuyères à géométrie complexe. //Thèse de doctorat (candidat en russe). – M.: Université d'Etat de Moscou Lomonossov, 1991. En russe.

² Metchenova V.A., Rosliakov Gu.S. Application des méthodes parfaitement implicites à la résolution du problème direct de la théorie de tuyère. //Méthodes numériques de la physique mathématique. – M.: Editions de l'Université d'Etat de Moscou Lomonossov, 1996. En russe.

³ Koretsky V.V., Lioubimov D.A. Méthode modifiée de factorisation approximative pour le calcul des écoulements spatiaux irrotationnels dans les canaux. //Revue des mathématiques appliquées et de la physique mathématique. – 1990. – vol.30. №10. En russe.

$\left(0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}\right)$, la courbe 2 – 50x20x5 $\left(0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{40}\right)$, la courbe 3 – 65x43x5 $\left(0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{40}\right)$. Plus on a du nombre de nœuds de grille, moins on a de l'étendue des valeurs de débit aux sections. Ces calculs montrent les avantages principaux de la nouvelle méthode: une haute vitesse de la convergence et une exactitude acceptable.

Après l'étude des problèmes axisymétriques on a calculé l'écoulement de gaz dans la tuyère à un plan de symétrie¹. Au demi-plan $y > 0$ du plan de symétrie $z = 0$ la génératrice de la tuyère $y_+(x)$ a des paramètres suivants (fig.5):

$$\vartheta_0 = \frac{\pi}{6}; \vartheta_1 = \frac{\pi}{12}; R_0 = 3,0; R_1 = 1,0; R_2 = 1,0; a = -5,0; b = 0,4, \text{ et au demi-plan } y < 0 \text{ les}$$

paramètres de la génératrice $y_-(x)$ sont les mêmes, sauf l'un: $\vartheta_0 = \frac{\pi}{4}$. Au plan xz la

génératrice $z_+(x) \equiv y_-(x)$. L'équation de la surface de la tuyère est suivante:

$$\left(\frac{y}{y_{\pm}(x)}\right)^2 + \left(\frac{z}{z_+(x)}\right)^2 = 1. \text{ La partie divergente de cette tuyère est axisymétrique d'un point}$$

de vue géométrique, mais pourtant l'écoulement dans ce domaine a un caractère spatial. La non-uniformité du courant se répand sur la partie cylindrique de la tuyère aussi. Les graphiques de la force latérale (fig.9) et du moment (fig.10) montrent une bonne coïncidence qualitative avec les résultats du travail mentionné qui sont obtenus à l'aide de la méthode de stabilisation et marqués comme les croix ("боковая сила"="force latérale", "момент"="moment").

Un exemple illustrant suivant fournit une idée de la structure de l'écoulement dans la tuyère à sortie rectangulaire. Au plan $y = 0$ la génératrice $z_+(x)$ a des paramètres (fig.5):

$$\vartheta_0 = \frac{\pi}{6}; \vartheta_1 = \frac{\pi}{12}; R_0 = 2,0; R_1 = 2,0; R_2 = 2,0; a = -4,0; b = 2,0. \text{ Au plan } z = 0 \text{ la génératrice}$$

$y_+(x) \equiv 0,5 z_+(x)$. La fonction de la "super-ellipticité" $\omega(x) \equiv 2$ si $x \leq 0$ et $\omega(x) \equiv 2x^2 + 2$ si $x > 0$. Sur la fig.11 on fournit des lignes de niveau de pression à la sortie de cette tuyère. La condensation de ces lignes a lieu aux environs de $\varepsilon = \arctg 2$, et on peut s'attendre qu'à la croissance de x les paramètres aérodynamiques ou leurs dérivées soient discontinus sur la surface $\varepsilon = \arctg 2$.

Outre cela on a étudié deux groupes de nouvelles tuyères étant utilisées pratiquement. Pour elles au plan $y = 0$ la génératrice $z_+(x)$ a des paramètres (fig.5):

$$\vartheta_0 = \frac{\pi}{4}; R_0 = 3,125; R_1 = 1,0; R_2 = 0,625; a = -3,85 \text{ si } a \leq x \leq 0, \text{ et si } x > 0 \text{ la génératrice}$$

$z_+(x)$ est déterminée par les valeurs $\{x_\lambda, z_\lambda\}_{\lambda=1}^\Lambda$ qui résultent de la résolution d'un problème de profilage. A l'aide de ces valeurs on construit un spline interpolant cubique pour la fonction $z_+(x)$. Au plan $z = 0$ la génératrice $y_+(x) \equiv z_+(x)$. On a étudié quatre tuyères qui se distinguaient les unes des autres par les valeurs $\{x_\lambda, z_\lambda\}_{\lambda=1}^\Lambda$ ou par la fonction $\omega(x)$: les

tuyères des groupes différents se distinguaient les unes des autres par les valeurs $\{x_\lambda, z_\lambda\}_{\lambda=1}^\Lambda$, les tuyères d'un groupe se distinguaient l'une de l'autre par la fonction $\omega(x)$ – pour la première tuyère de chaque groupe (les tuyères 1.1 et 2.1) la fonction $\omega(x)$ était suivante: $\omega(x) \equiv 2$ si $x \leq 0$ et $\omega(x) \equiv 2x^2 + 2$ si $x > 0$, les tuyères 1.2 et 2.2 étaient axisymétriques ($\omega(x) \equiv 2$). Il est intéressant de conférer les distributions de la force de traction dans le

¹ Dvoretzky V.M. A l'étude des écoulements spatiaux mixtes dans les tuyères à entrée asymétrique. //Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS. Mécanique des Fluides. – 1975. – №2. En russe.

domaine supersonique pour une tuyère axisymétrique et pour une tuyère à sortie presque carrée. Fig.12 illustre la dépendance de la traction de l'aire de la section transversale d'une tuyère (la courbe 1 correspond à la tuyère 1.1, la courbe 2 – la tuyère 1.2, la courbe 3 – la traction calculée de la théorie 1D, “тяга”=“traction”). Comme il a été dit plus haut, les contours supersoniques des tuyères axisymétriques 1.2 et 2.2 sont construits de la résolution d'un problème de profilage et c'est pourquoi ces tuyères sont bonnes en sens certain. L'étude faite montre que l'on peut construire les tuyères à section rectangulaire (qui forment en liasse une issue d'une façon économique, sans vides) proches des tuyères axisymétriques du point de vue des caractéristiques de traction.

Il est rationnel d'appliquer l'algorithme proposé aux écoulements contenant de petits domaines supersoniques. Une erreur apportée par l'utilisation de la densité modifiée peut s'accroître en cas de l'étude des écoulements à de grands nombres de Mach (en ce cas un supplément à la densité a un grand poids) par la méthode parfaitement implicite modifiée. En posant ν dans le domaine supersonique comme une fonction décroissante de nombre de Mach (mais non pas comme une constante), il se peut de réussir à diminuer une influence indésirable de la compressibilité artificielle. Cependant cette question ne s'est pas examinée en détail à la thèse. Le travail suivant a été d'essayer de rassembler la MPIM et la MFA (à la dernière on utilise à titre d'un mécanisme dissipatif les différences finies unilatérales en direction contraire à courant dans le domaine supersonique).

Dans le troisième paragraphe du deuxième chapitre se trouvent: les résultats de l'étude des écoulements spatiaux de gaz dans les tuyères par la MFA¹, un nouvel algorithme représentant une combinaison de la MPIM et de la MFA, les résultats des calculs des écoulements spatiaux de gaz dans les tuyères par la méthode combinée.

Avant d'étudier les tuyères à géométrie complexe par la MFA, il a été nécessaire de calculer l'écoulement de gaz dans une quelconque tuyère simple et bien étudiée pour établir les caractéristiques principales de la méthode. A titre d'exemple on a choisi la tuyère modèle axisymétrique². Il s'est trouvé que la MFA est plus efficace que la MPIM du point de vue de la dépense de temps machine pour une itération (1,5 – 1,6 fois). Cependant la MFA cède essentiellement à la MPIM étudiée à la thèse en vitesse de la convergence. C'est du point de vue de la dépense de temps machine global de calcul que la MPIM gagne. Les résultats obtenus ont permis de formuler les avantages principaux des méthodes réalisées. D'un côté, la vitesse de la convergence de la MPIM est bien plus haute que celle de la MFA. D'un autre côté, l'introduction de la compressibilité artificielle dans le schéma aux calculs par la méthode parfaitement implicite modifiée exerce une influence certaine sur les paramètres du courant, et une erreur apportée par l'utilisation de la densité modifiée peut s'accroître. C'est pourquoi la MFA est préférable à la MPIM à l'étude des écoulements à de grands nombres de Mach à la sortie.

Un exemple suivant illustre la possibilité de l'application de la MFA pour le calcul de tuyères à une grande partie supersonique. On a étudié l'écoulement supersonique dans une tuyère à section carrée. L'équation de la surface de cette tuyère est suivante:

$$\left(\frac{y}{y_+(x)}\right)^{\omega(x)} + \left(\frac{z}{z_+(x)}\right)^{\omega(x)} = 1, \quad \text{où} \quad \text{les} \quad \text{génératrices}$$

$$y_+(x) \equiv z_+(x) = \begin{cases} 1,5 - 0,5 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{10}\right) & 0 \leq x \leq 10 \\ 2, & 10 < x \leq 20 \end{cases}, \quad \text{et} \quad \omega(x) \equiv 20. \quad \text{On a posé au col le nombre}$$

¹ Ivanov M.Ya., Koretsky V.V. Calcul des écoulements dans les tuyères 2D et 3D par la méthode de factorisation approximative. //Revue des mathématiques appliquées et de la physique mathématique. – 1985. – vol.25, №9. En russe.

² Metchenova V.A., Rosliakov Gu.S. Application des méthodes parfaitement implicites à la résolution du problème direct de la théorie de tuyère. //Méthodes numériques de la physique mathématique. – M.: Editions de l'Université d'Etat de Moscou Lomonossov, 1996. En russe.

de Mach égal à l'unité. Sur la fig.13 on fournit des lignes de niveau de pression au plan $y = 0$ (au plan $z = 0$ le dessin est analogue). Les calculs par la MFA ont été faits aussi pour les nouvelles tuyères à sortie carrée étant utilisées pratiquement. On a comparé les résultats obtenus par la MPIM avec ceux obtenus par la MFA.

La combinaison de ces deux méthodes (c'est-à-dire l'application de la MPIM au calcul de l'écoulement sub-, trans- et modérément supersonique, ensuite l'application de la MFA) est l'un des procédés à la résolution des problèmes 3D de l'aérodynamique intérieure dans l'étendue large de vitesses. A ce procédé de l'étude des écoulements mixtes on calcule les paramètres aérodynamiques des domaines sub-, trans- et modérément supersoniques d'une tuyère à l'aide de la MPIM, rapide et exacte. On calcule les paramètres du domaine supersonique d'une tuyère à l'aide de la MFA.

Les résultats principaux de la thèse sont formulés dans la conclusion. Ce sont:

1. Une méthode itérative efficace du nombre de celles parfaitement implicites est créée sur la base de l'approximation symétrique de 19 points d'un problème aux limites pour une équation différentielle linéaire aux dérivées partielles de type elliptique à trois variables indépendantes.
2. A l'aide de cette nouvelle méthode un algorithme du calcul des écoulements spatiaux de gaz dans les tuyères est créé et réalisé comme un programme sur la base de l'équation complète du potentiel, laquelle est quasi linéaire de type mixte. La vitesse de la convergence de cet algorithme est plus haute que celle des autres méthodes.
3. Pour la résolution numérique des problèmes 3D de l'aérodynamique intérieure dans l'étendue large de vitesses on a réalisé un algorithme combiné sur la base de deux méthodes perspectives de l'étude des écoulements spatiaux de gaz: la méthode parfaitement implicite modifiée étudiée à la thèse et la méthode de factorisation approximative déjà connue.
4. La possibilité de la construction des tuyères à sortie rectangulaire proches de tuyères axisymétriques du point de vue des caractéristiques de traction, cette possibilité est mise en évidence à l'aide des algorithmes réalisés.

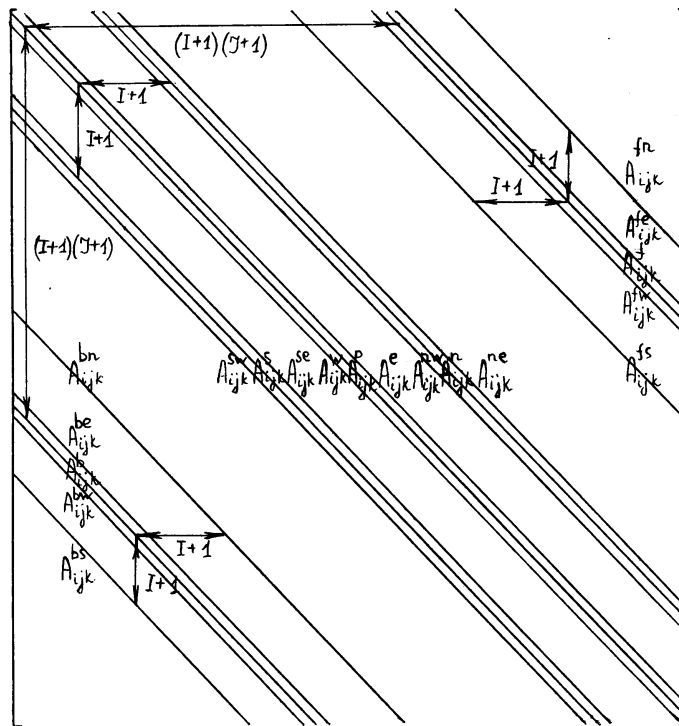


Fig.1

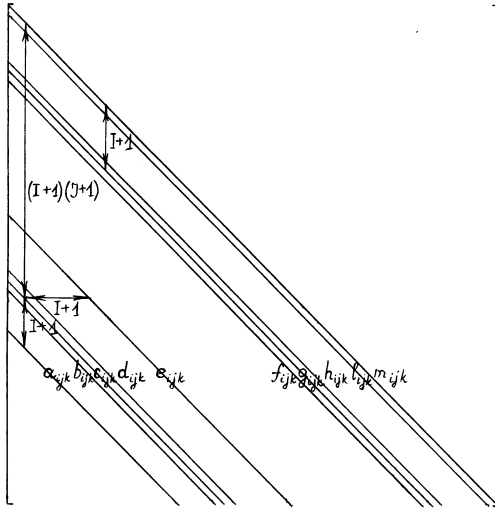


Fig.2a

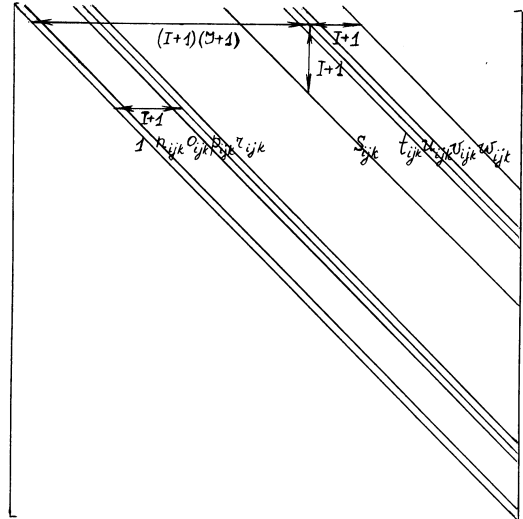


Fig.2b

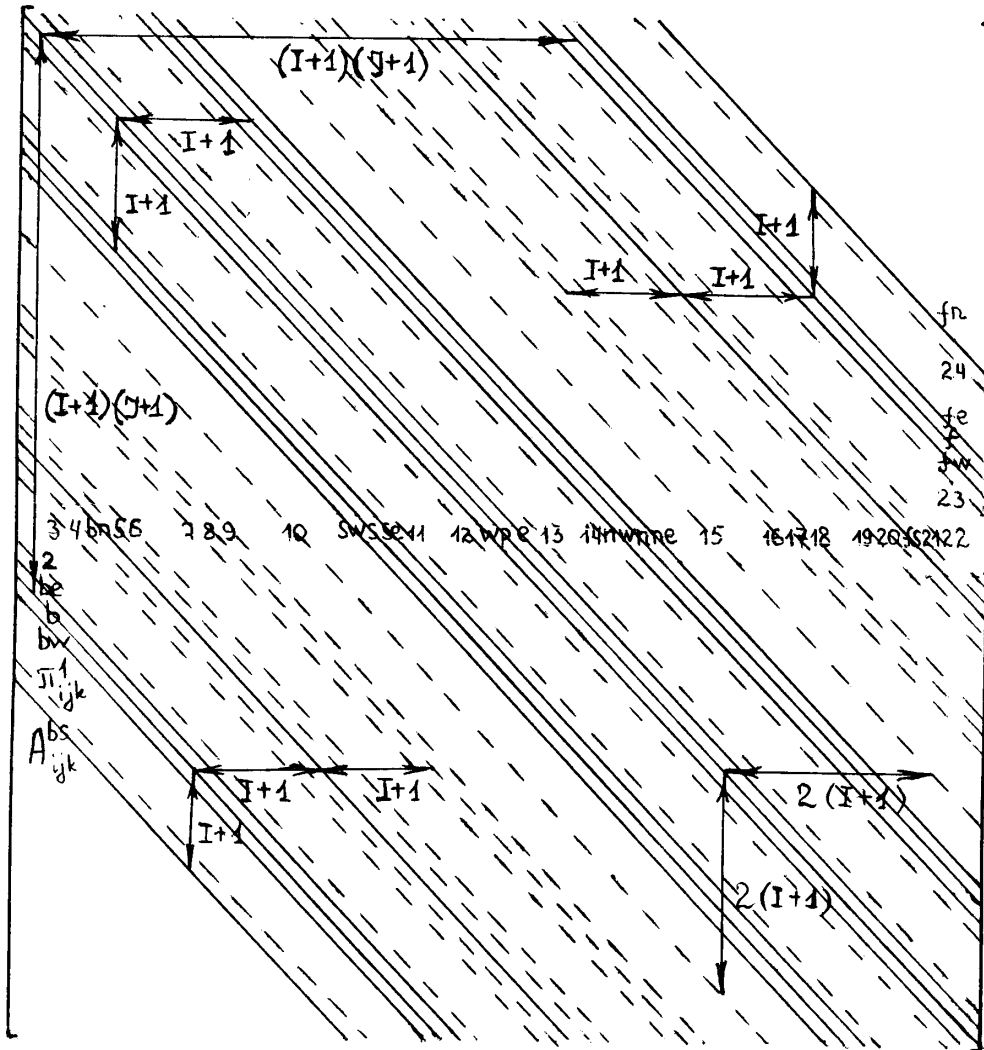


Fig.3

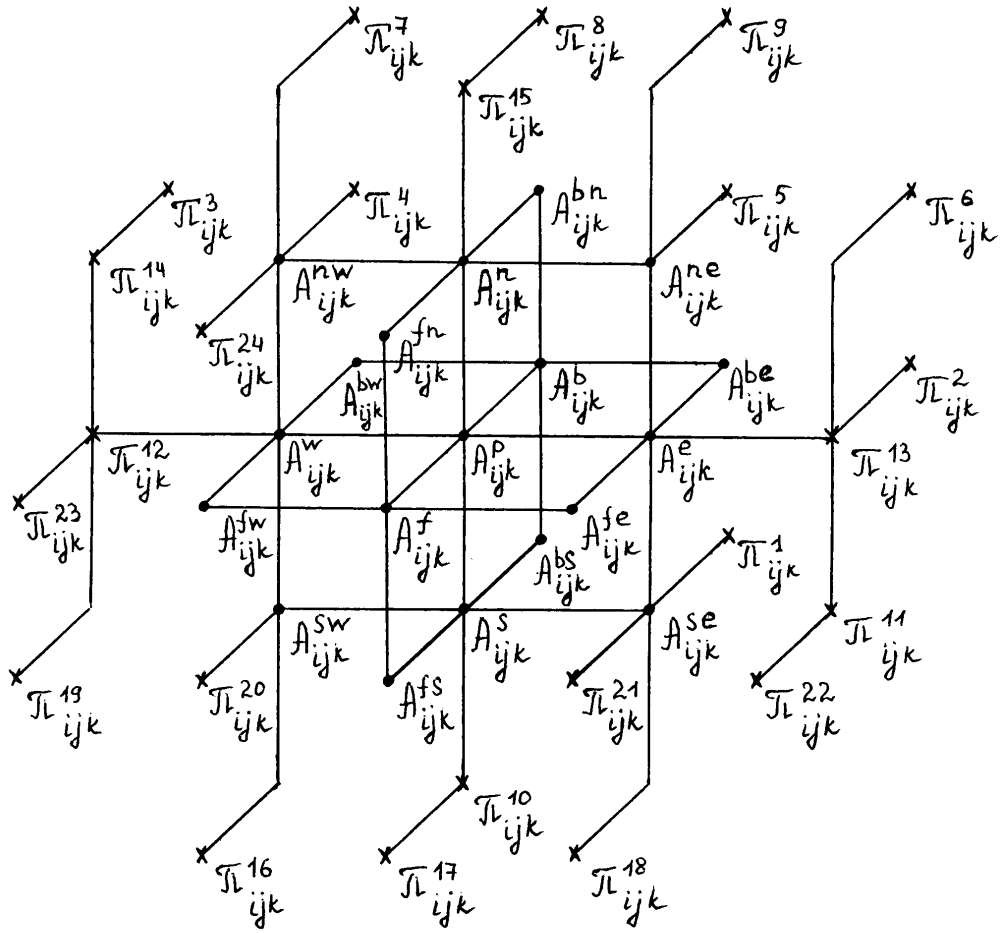


Fig.4

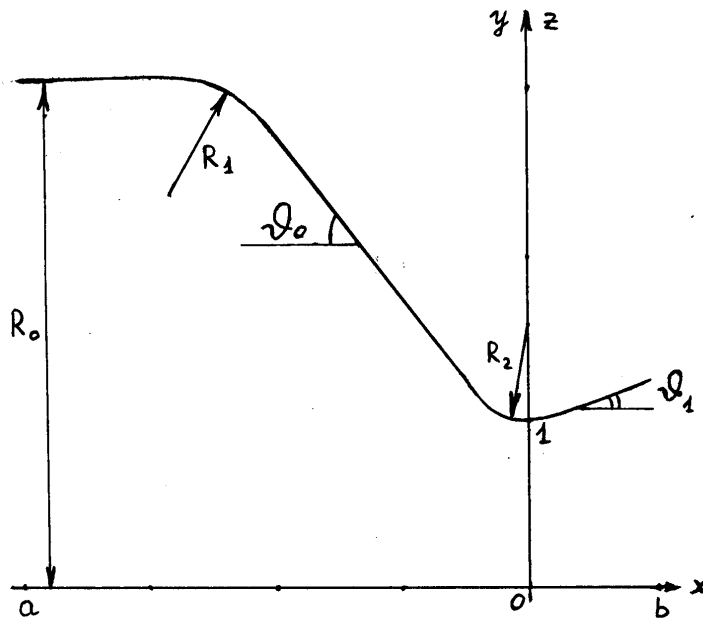


Fig.5

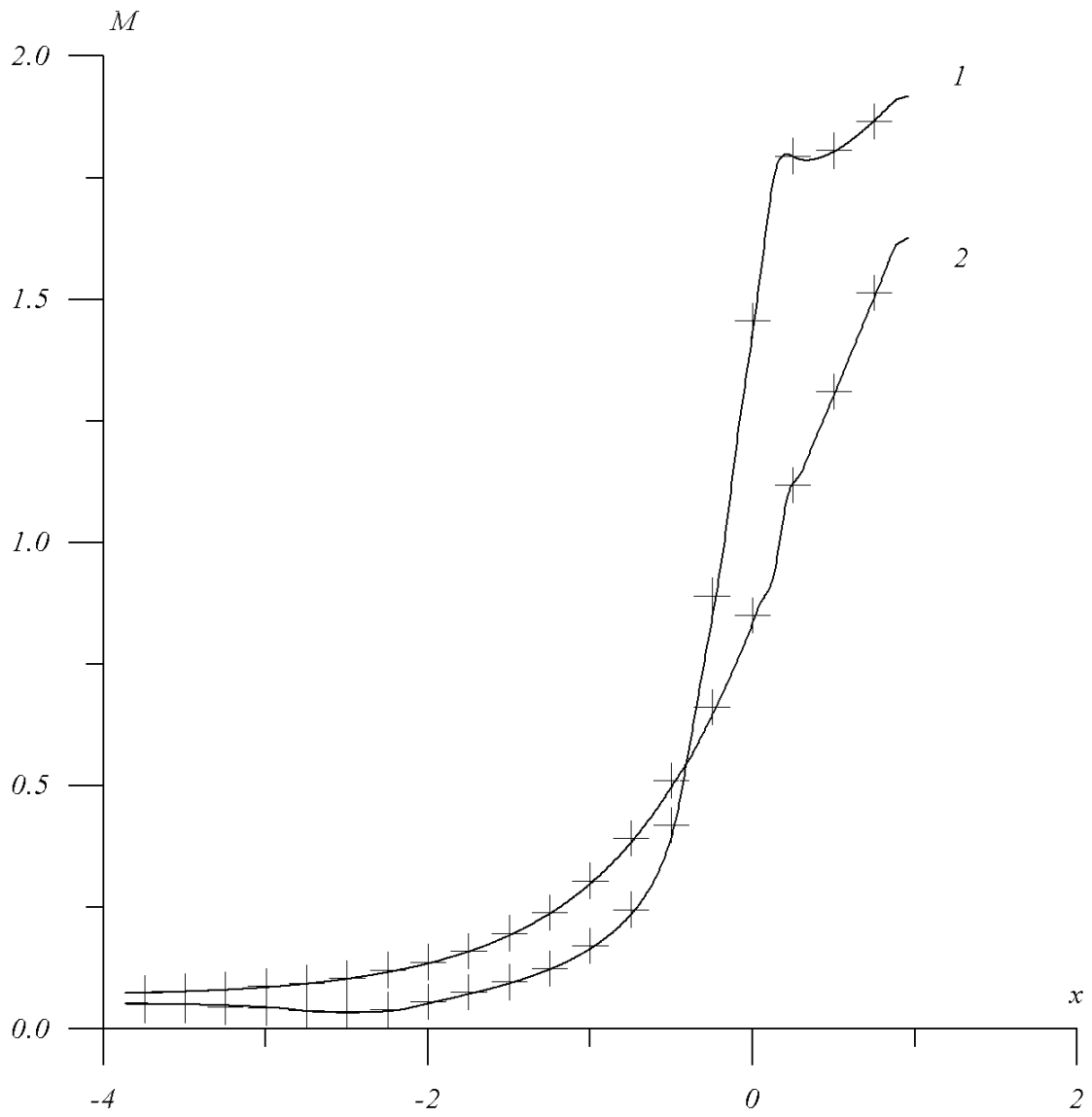


Fig.6

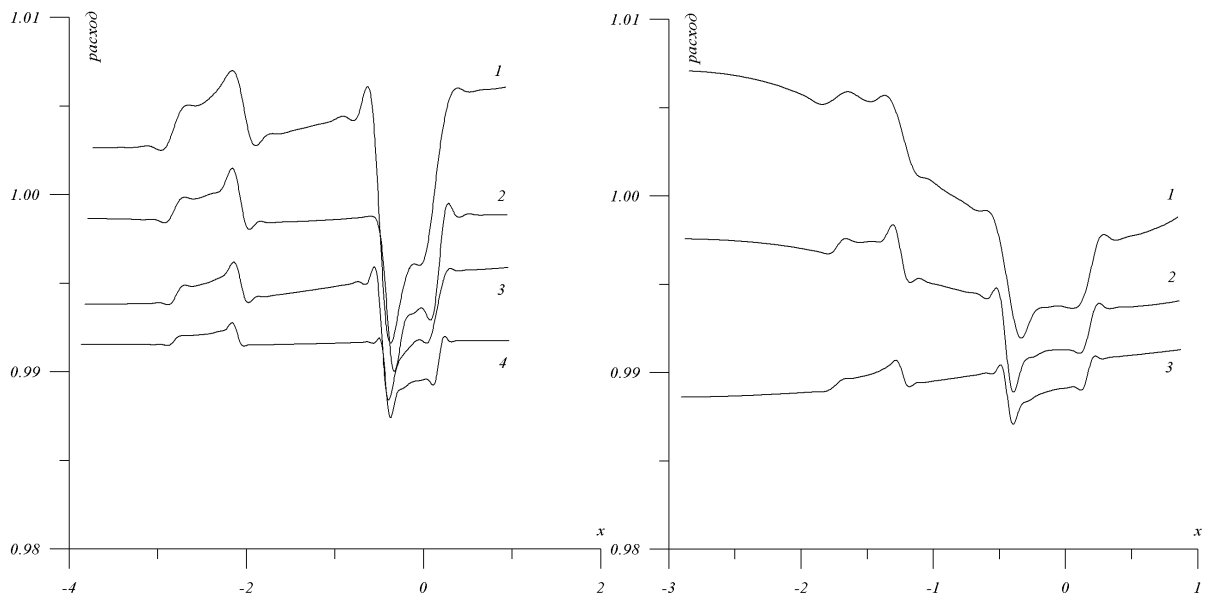


Fig.7

Fig.8

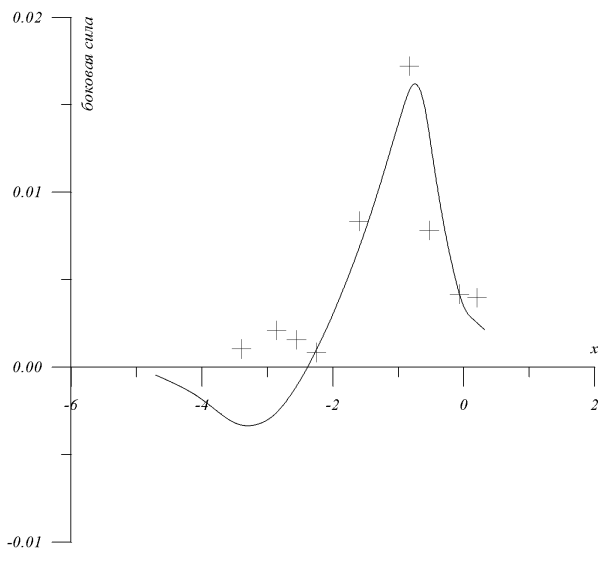


Fig.9

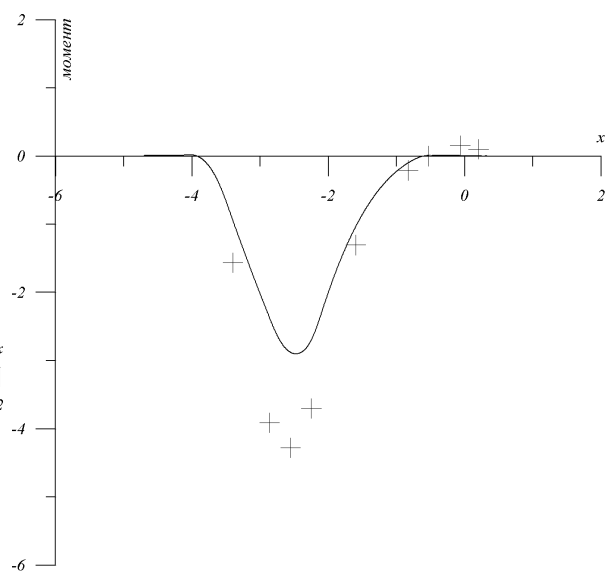


Fig.10

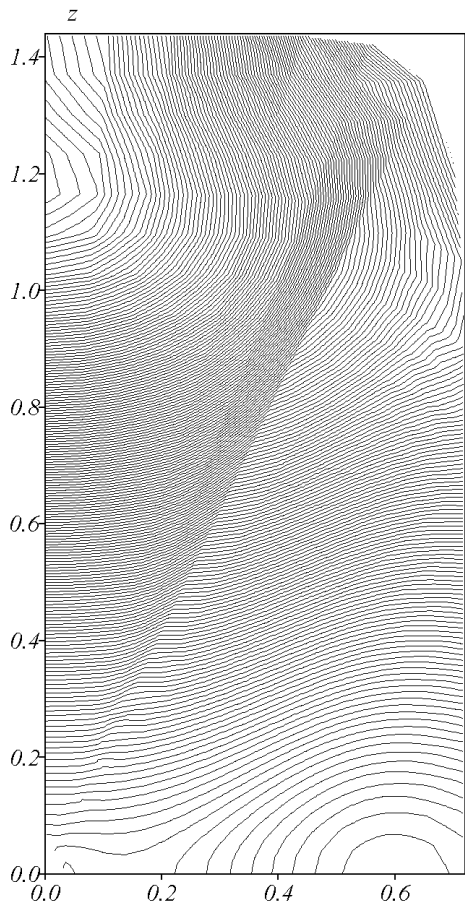


Fig.11

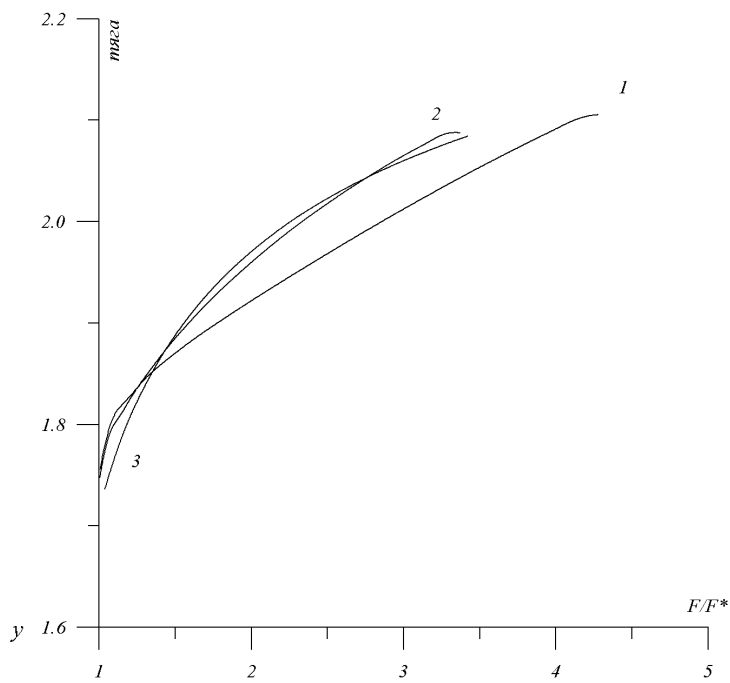


Fig.12

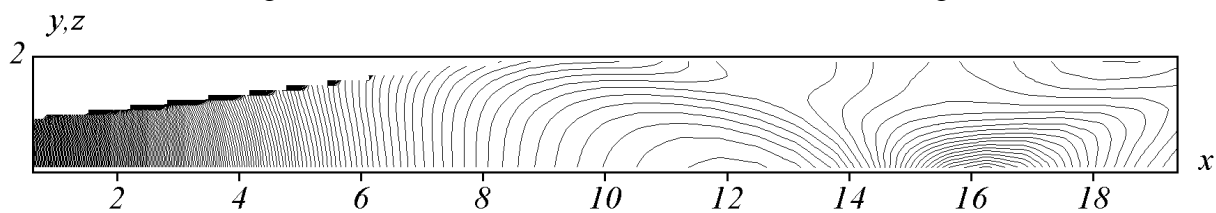


Fig.13

LES RESULTATS PRINCIPAUX DE LA THESE SONT PUBLIES DANS LES TRAVAUX:

1. Rosliakov Gu.S., Fedorenko V.V. Etude de l'écoulement spatial de gaz dans la tuyère par la méthode parfaitement implicite. //Méthodes de la modélisation mathématique. – M.: Editions de la faculté des mathématiques appliquées et cybernétique de l'Université d'Etat de Moscou Lomonossov, 1998. – pp.76 – 86. En russe.
2. Rosliakov Gu.S., Fedorenko V.V. Etude de l'écoulement de gaz dans la tuyère spatiale par la méthode parfaitement implicite. //Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS. Mécanique des Fluides. – 1997. – №4. – Matières de la VIII-ième école-séminaire “Les problèmes actuels de l'aérohydrodynamique” (Sébastopol', le 4-13 septembre, 1996). – pp.179 – 191. En russe.
3. Fedorenko V.V. Etude des tuyères spatiales. //Matières des XXI-ièmes lectures scientifiques de la cosmonautique. – M., 1997. – pp.15 – 16. En russe.
4. Fedorenko V.V. Etude des tuyères spatiales. //Matières de la conférence internationale d'étudiants et de doctorants en sciences fondamentales “Lomonossov”. – M.: Editions de l'Université d'Etat de Moscou Lomonossov, 1998. – pp.204. En russe.
5. Fedorenko V.V. Application des méthodes relaxationnelles au calcul des écoulements spatiaux de gaz dans les tuyères. //Manuscrit déposant au VINITI. – 26.10.98, №3075-B98. En russe.